# Theoretical Mechanics 理论力学

朱鸿鹄
南京大学地球科学与工程学院



埃菲尔铁塔，俗称法国铁娘子
(EIFFEL TOWER, 1887-1889, H=320m)

南京大学 NANJING UNIVERSITY

## 第三章 平面任意力系

埃菲尔铁塔的总设计者是法国建筑师居斯塔夫·埃菲尔。

该塔共分为三层，其中一、二层是餐厅，分别高57米、115米，第三层是观景台，高274米，塔身大部分是透空的，从塔座到塔顶共有1711级台阶，后安装了电梯。

南京大学 NANJING UNIVERSITY

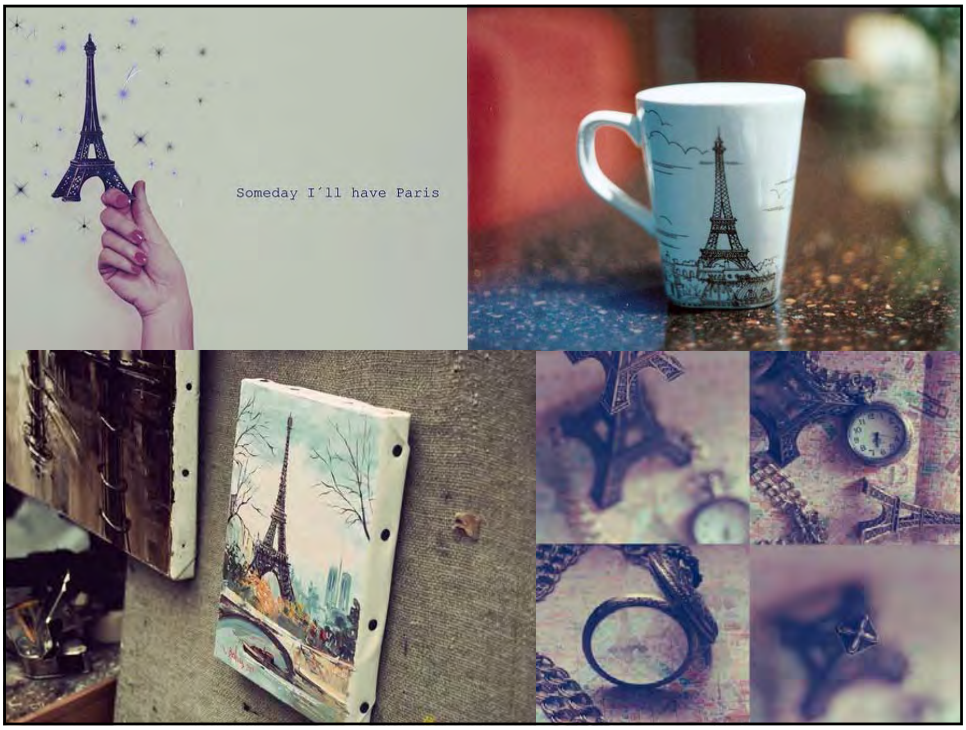
# 第三章 平面任意力系

埃菲尔铁塔是为1889年巴黎世界博览会（纪念1789年法国资产阶级革命100周年）而建的，现在已经成为19世纪西方世界工业革命巨大成就的象征和标志。

该塔在1931年美国纽约的克莱斯勒大厦竣工之前，曾保持了45年的世界最高建筑记录。它曾和纽约帝国大厦（1931年）、东京电视塔（1958年）同被誉为西方三大著名建筑。

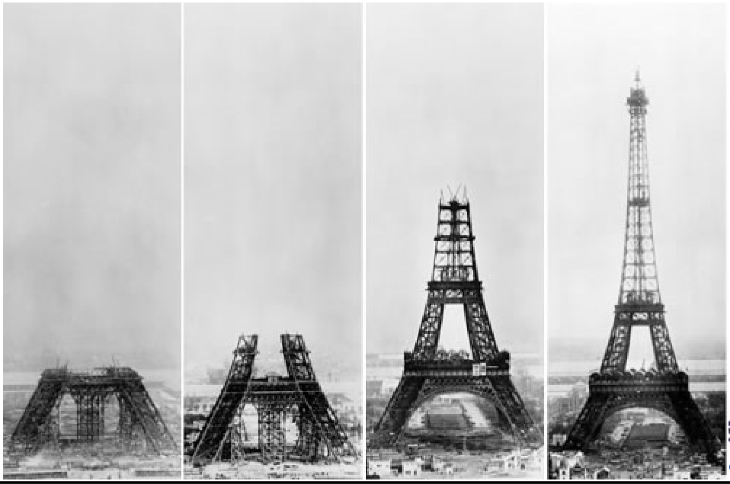
该塔既是法国广播电台中心，又是气象台和电视发射台。一战期间还为法国的无线电通讯联络做出过巨大贡献。

NANJING UNIVERSITY



## 第三章 平面任意力系

**该塔建造前先在勒瓦卢瓦工地上搭起的巨大“积木”，精确度几乎高达1/10毫米。工期为21个半月。该塔造价为7799401法郎(埃菲尔原预算为800万法郎)。第一年门票收入为造价的3/4**



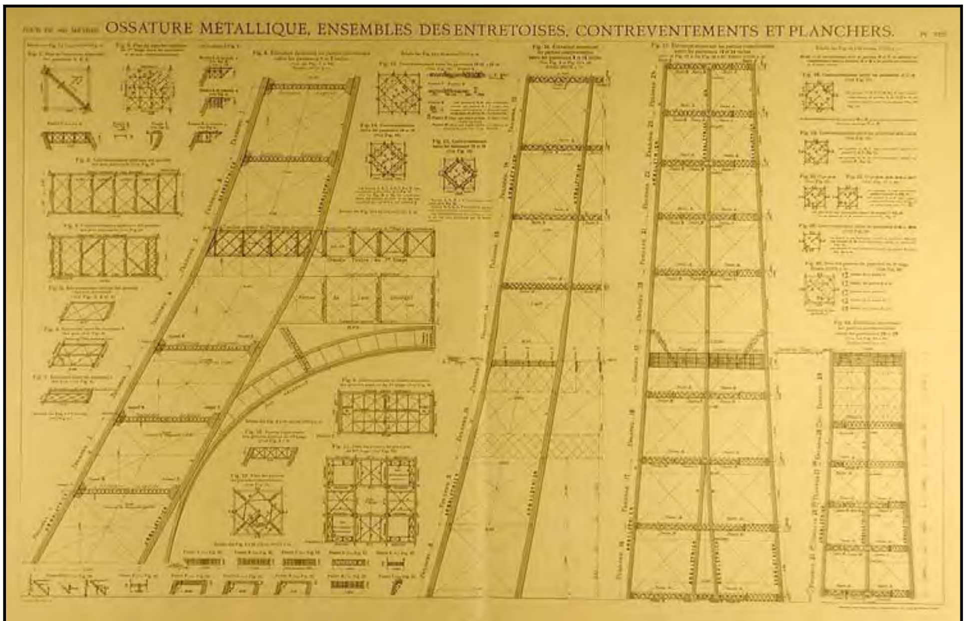
## 第三章 平面任意力系

从结构上来说，埃菲尔铁塔以四个巨大的、地面分布呈正方形的钢筋水泥塔墩为基础，上部结构利用了金属拱和桁架结构的优点。共用去7000吨锻铁，共有1500多根巨型预制梁架、1.8万多个锻铁铸件，259万颗铆钉，共钻孔700万个。

铁塔自重很轻，据说它对地面的压力只有一个人坐在椅子上那么大。

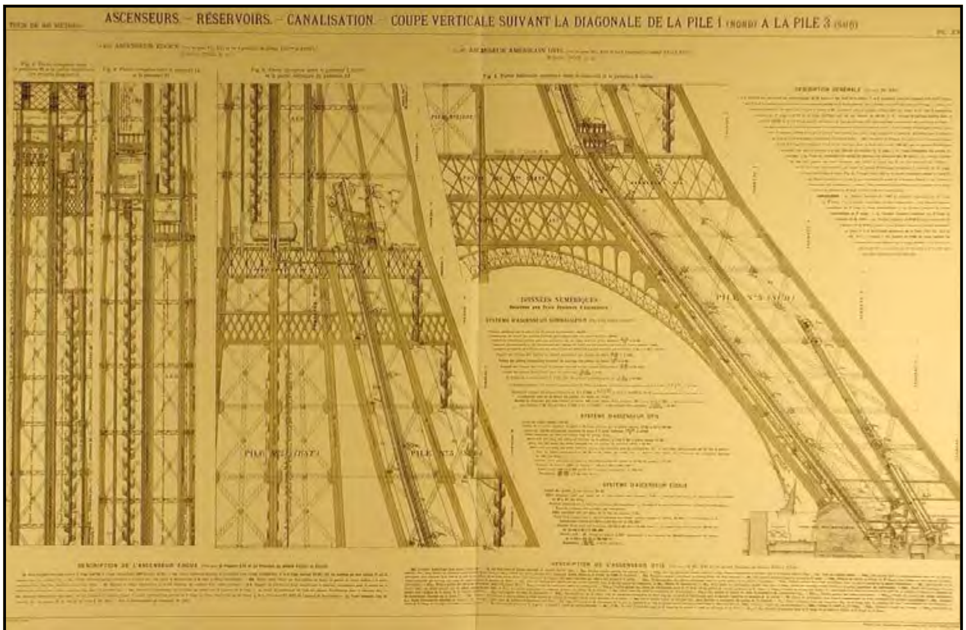
## 第三章 平面任意力系

由于铁塔上的每个部件事先都严格编号，装配时没出一点差错。施工完全依照原设计进行，中途没有进行任何改动，可见设计之合理、计算之精确。其前期的设计图纸据说有5300多张，其中全图就有1700张，动用的设计师有50名。



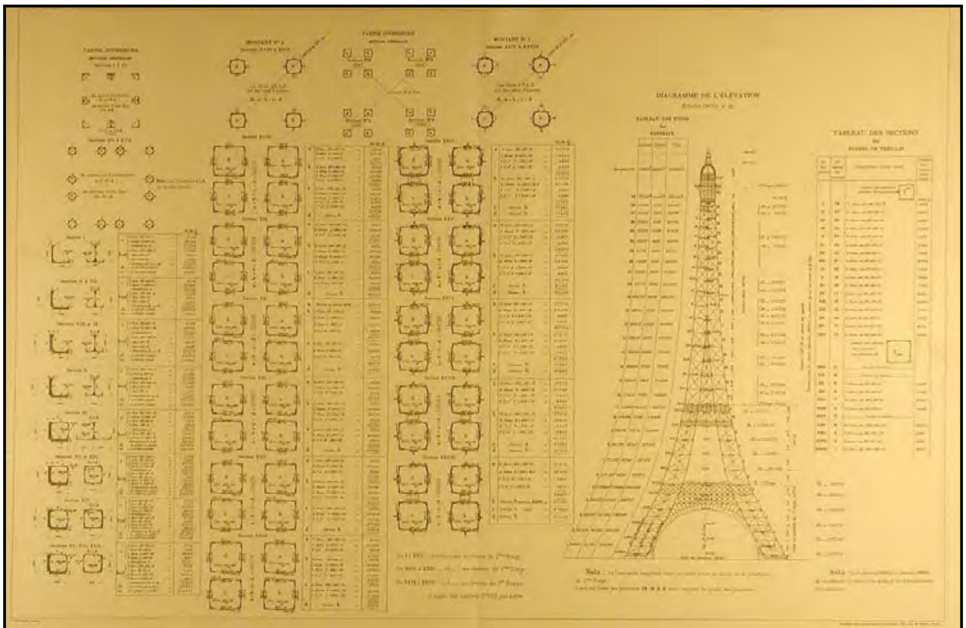

设计图纸(BLUEPRINTS)

南京大学 NANJING UNIVERSITY



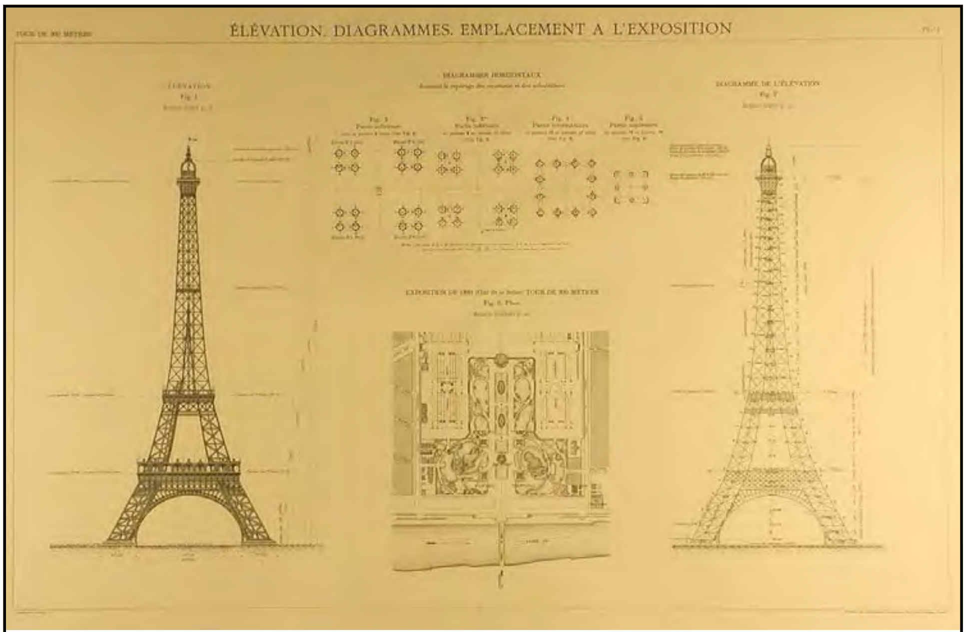

## 设计图纸(BLUEPRINTS)

南京大学
NANJING UNIVERSITY



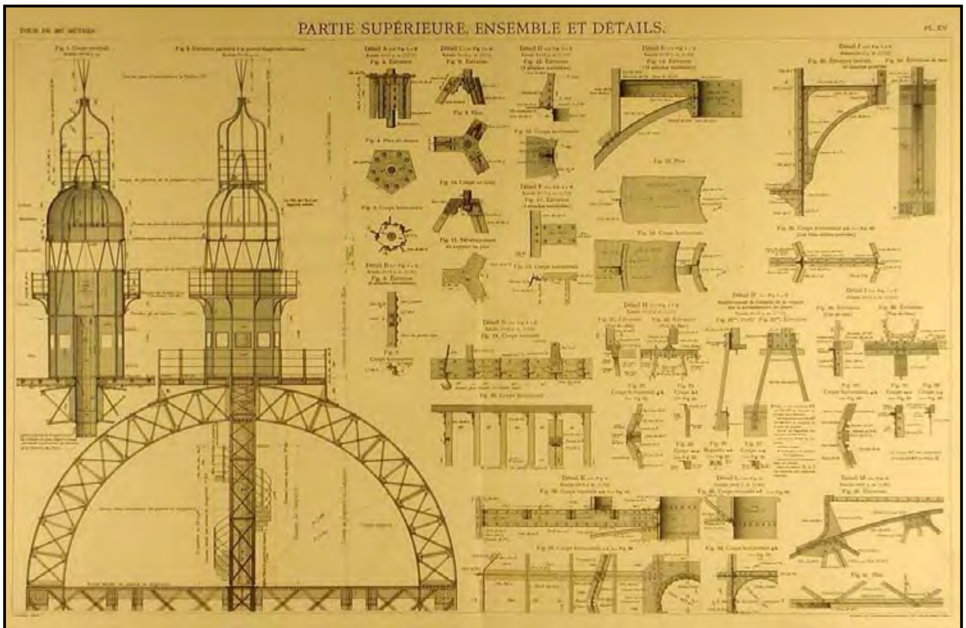
## 设计图纸(BLUEPRINTS)

南京大学
NANJING UNIVERSITY



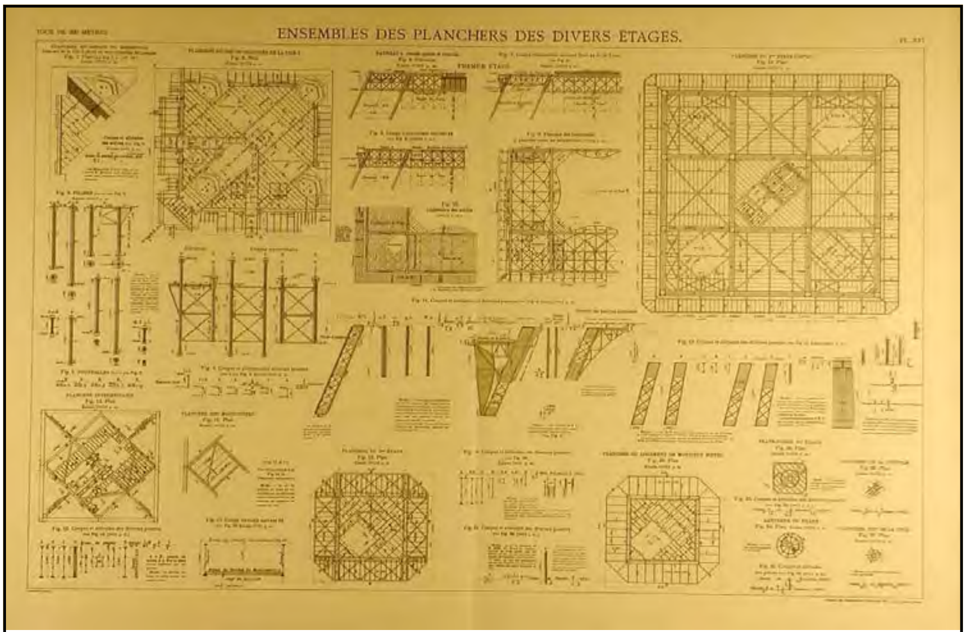

设计图纸(BLUEPRINTS)

NANJING UNIVERSITY




设计图纸(BLUEPRINTS)

NANJING UNIVERSITY




设计图纸(BLUEPRINTS)

南京大学 NANJING UNIVERSITY

## 第三章 平面

有意思的是，这座铁塔只有在夜间才能与地面垂直。上午铁塔向西倾斜100mm，中午铁塔向西北倾斜70mm。每年铁塔都要完成一次自己的壮举——自动升高。因为在炎热的夏天，铁塔会因受热膨胀而自动升高约170mm——但在天气变冷时，铁塔会自动收缩至正常水平。

## 第三章 平面任意力系

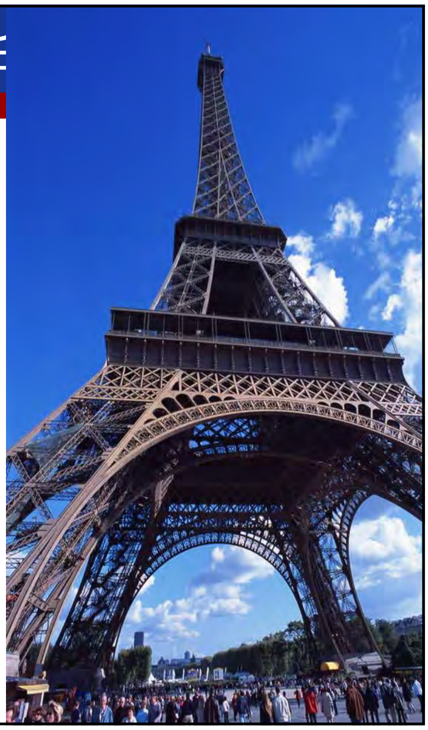
埃菲尔铁塔原计划在建成20年之后拆除，至今屹立百年不倒。

铁塔每隔7年要油漆一次，每次用漆50-60吨。最近的一次是2009年。

铁塔使用的油漆的颜色十分独特，由三种不同色度的褐色构成，底部是深褐色，顶部是浅褐色，它有一个专门的名字叫做“埃菲尔铁塔棕褐色”。

## 第三章 平面任

埃菲尔铁塔曾受到诸多法国艺术名流的非议，莫泊桑曾扬言：“巴黎如果建成铁塔，我要永远离开这个城市”。不过据说，来铁塔这里吃饭和喝茶最多的人就是他。有人好奇地问他原因，莫泊桑说：“谁让这里是巴黎唯一看不见那座破塔的地方？”



## 第三章 平面任意力系

§ 3-1 平面任意力系向作用面内一点简化

§ 3-2 平面任意力系的平衡条件和平衡方程

§ 3-3 物体系的平衡．静定和超静定问题

§ 3-4 平面简单桁架的内力计算

南京大學 NANJING UNIVERSITY

## 第三章 平面任意力系

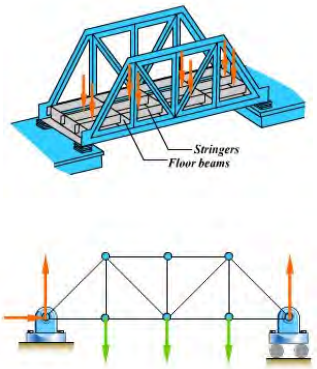
### 教学基本要求

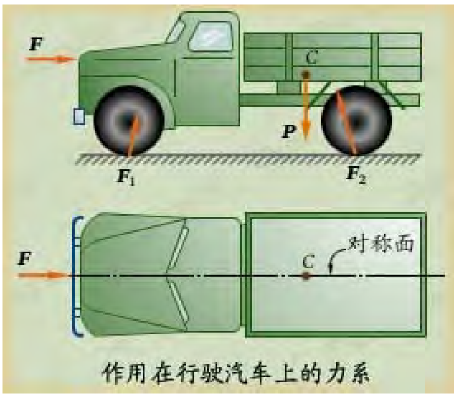
- ❑掌握平面任意力系的简化理论、主矢主矩的概念
- ❑掌握平面任意力系的平衡条件和平衡方程，并会熟练使用这些平衡方程解决平面任意力系的平衡问题
- ❑掌握平面简单桁架的内力计算。了解静定超静定的概念

南京大學 NANJING UNIVERSITY

## 第三章 平面任意力系

### §3-1 平面任意力系向作用面内一点简化



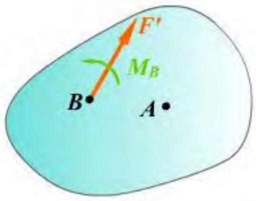

平面任意力系实例

南京大学 NANJING UNIVERSITY

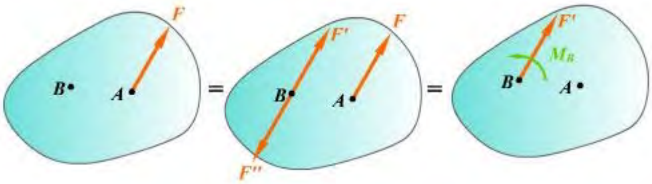
## 第三章 平面任意力系

1、力的平移定理

可以把作用在刚体上点***A***的力***F***平行移到任一点***B***，但必须同时附加一个力偶，这个附加力偶的矩等于原来的力***F***对新作用点***B***的矩.

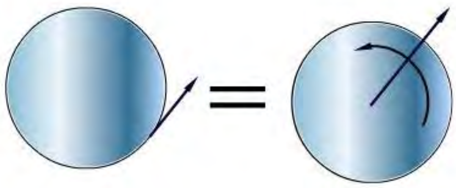


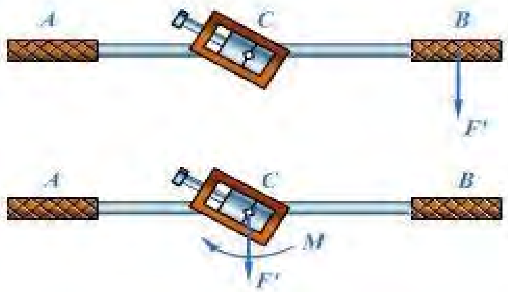

$$M_B = M_B(\vec{F}) = Fd$$




南京大学 NANJING UNIVERSITY

## 第三章 平面任意力系








## 第三章 平面任意力系

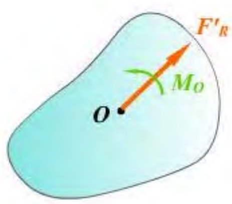
2、平面任意力系向作用面内一点简化・主矢和主矩

$$\vec{F}_1' = \vec{F}_1 \quad M_1 = M_O(\vec{F}_1)$$

$$\vec{F}_2' = \vec{F}_2 \quad M_2 = M_O(\vec{F}_2)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\vec{F}_n' = \vec{F}_n \quad M_n = M_O(\vec{F}_n)$$

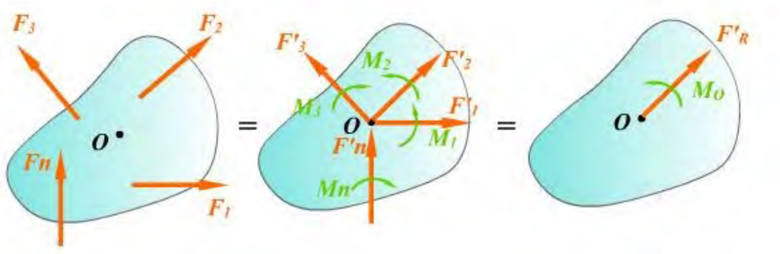



$$\vec{F}_R' = \sum \vec{F}_i' = \sum \vec{F}_i$$

$$\boldsymbol{M}_O = \sum \boldsymbol{M}_i = \sum \boldsymbol{M}_O(\vec{\boldsymbol{F}}_i)$$

## 第三章 平面任意力系

主矢 $\vec{F}_R' = \sum \vec{F}_i$　　主矩 $\boldsymbol{M_O} = \sum \boldsymbol{M_O}(\vec{\boldsymbol{F}}_i)$




主矢与简化中心无关，而主矩一般与简化中心有关.

NANJING UNIVERSITY

## 第三章 平面任意力系

$$F_{Rx}' = \sum F_{ix}' = \sum F_{ix} = \sum F_x$$

$$F_{Ry}' = \sum F_{iy}' = \sum F_{iy} = \sum F_y$$

主矢大小　$\boxed{\boldsymbol{F_R'} = \sqrt{(\sum \boldsymbol{F_{ix}})^2 + (\sum \boldsymbol{F_{iy}})^2}}$

方向　$\cos(\vec{F}'_R, \vec{i}) = \dfrac{\sum F_{ix}}{F_R'}$　$\cos(\vec{F}'_R, \vec{j}) = \dfrac{\sum F_{iy}}{F_R'}$

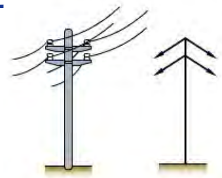
作用点　作用于简化中心上

主矩　$\boldsymbol{M_O} = \sum \boldsymbol{M_O}(\vec{\boldsymbol{F}}_i)$

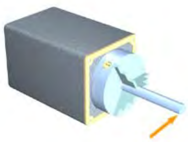
NANJING UNIVERSITY

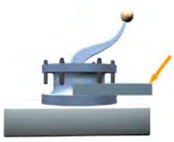
# 第三章 平面任意力系

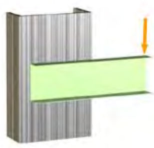
平面固定端约束实例

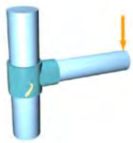


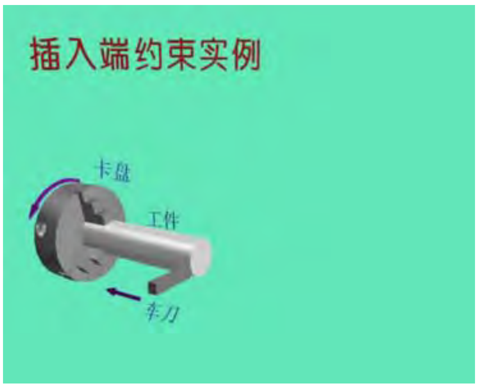

# 第三章 平面任意力系



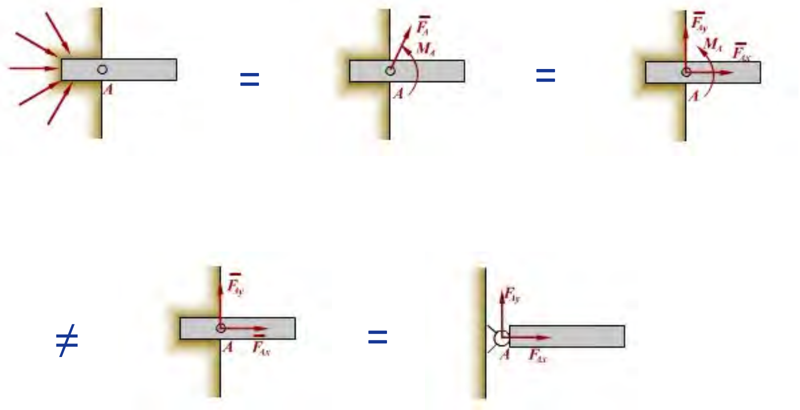








# 第三章 平面任意力系

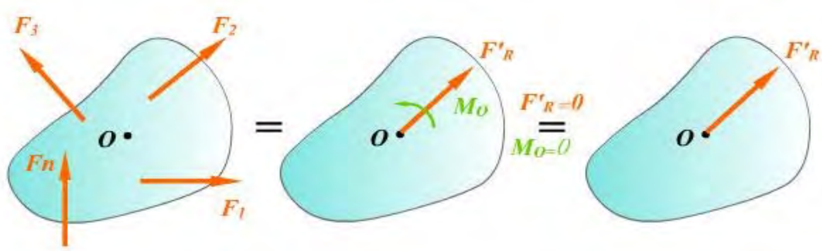




# 第三章 平面任意力系

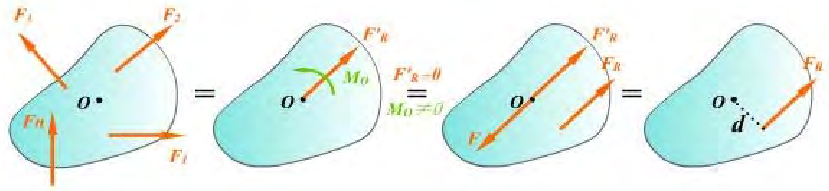
3、 平面任意力系的简化结果分析

$\overline{F}'_R \neq 0 \quad M_O = 0$ ⟹ 合力作用线过简化中心



## 第三章 平面任意力系

$\overline{F}'_R \neq 0 \quad M_O \neq 0 \Longrightarrow$ 合力，作用线距简化中心 $M_O / |F'_R|$



$d = \dfrac{M_O}{F'_R}$ $\qquad M_O = F'_R d$ $\qquad F_R = F'_R = F$

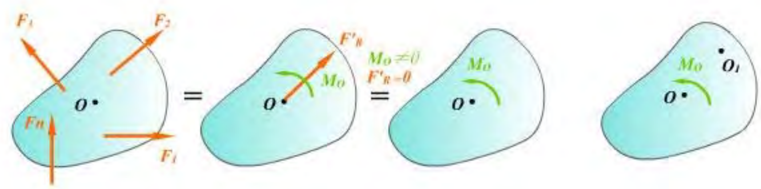
合力矩定理 $\qquad M_o(\overline{F}_R) = M_O = \sum M_O(\overline{F}_i)$

南京大学 NANJING UNIVERSITY

## 第三章 平面任意力系

$\overline{F}'_R = 0 \quad M_O \neq 0 \Longrightarrow$ 合力偶

与简化中心的位置无关



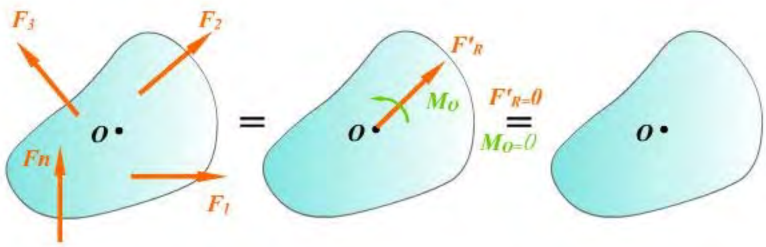
若为$O_1$点，如何?

南京大学 NANJING UNIVERSITY

## 第三章 平面任意力系

$\overline{F}_R' = 0 \quad M_O = 0 \quad \Longrightarrow$ 平衡

与简化中心的位置无关






## 第三章 平面任意力系

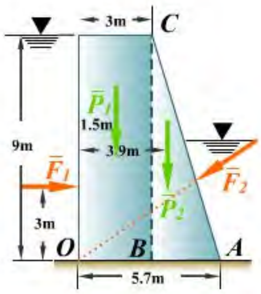
例3-1　重力坝问题

已知：$P_1 = 450\text{kN},\ P_2 = 200\text{kN},\ F_1 = 300\text{kN},\ F_2 = 70\text{kN};$

求：(1)力系向O点的简化结果

(2)合力与*OA*的交点到点*O*的距离*x*

(3)合力作用线方程

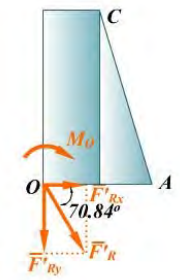


## 第三章 平面任意力系

解：（1）主矢：

$$\sum F_x = F_1 - F_2\cos\theta = 232.9\text{kN}$$

$$\sum F_y = -P_1 - P_2 - F_2\sin\theta = -670.1\text{kN}$$




$$F_R' = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2} = 709.4\text{kN}$$

$$\cos(\vec{F}_R', \vec{i}) = \frac{\sum F_x}{F_R'} = 0.3283,\ \cos(\vec{F}_R', \vec{j}) = \frac{\sum F_y}{F_R'} = -0.9446$$

$$\angle(\vec{F}_R', \vec{i}) = \pm 70.84^\circ,\ \angle(\vec{F}_R', \vec{j}) = 180^\circ \pm 19.16^\circ$$

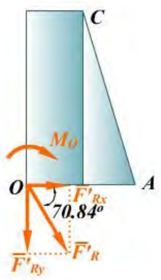
主矩：

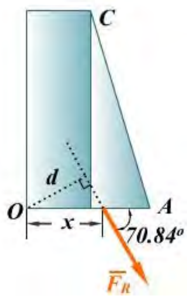
$$M_O = \sum M_O(\vec{F}) = -3F_1 - 1.5P_1 - 3.9P_2 = -2355\text{kN}\cdot\text{m}$$

南京大学 NANJING UNIVERSITY

## 第三章 平面任意力系

（2）求合力及其作用线位置.




$$d = \frac{|M_O|}{F_R'} = \frac{2355}{709.4} = 3.3197\text{m}$$

$$x = \frac{d}{\cos\left(90^0 - 70.84^0\right)} = 3.514\text{m}$$

南京大学 NANJING UNIVERSITY

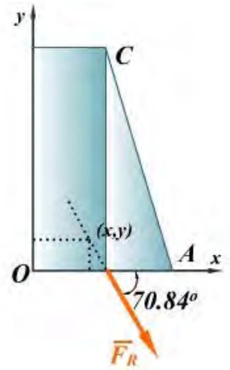
## 第三章 平面任意力系

（3）求合力作用线方程

$$M_O=\sum M_O\left(\vec{F}_R\right)=x\cdot F_{Ry}-y\cdot F_{Rx}=x\cdot F'_{Ry}-y\cdot F'_{Rx}$$

$$\Rightarrow -2355=x(-670.1)-y(232.9)$$

$$\Rightarrow 607.1x-232.9y-2355=0$$




南京大学 NANJING UNIVERSITY

## 第三章 平面任意力系

1、平面任意力系的平衡方程

平面任意力系平衡的充要条件是：

力系的主矢和对任意点的主矩都等于零

$$\Rightarrow \quad \vec{F}'_R=0 \quad M_O=0$$

因为 $F'_R=\sqrt{(\sum F_x)^2+(\sum F_y)^2}$ $\quad M_O=\sum M_O(\vec{F}_i)$

南京大学 NANJING UNIVERSITY

## 第三章 平面任意力系

平面任意力系的平衡方程

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_O = 0 \end{cases} \qquad \text{一般式}$$

平面任意力系平衡的解析条件是：所有各力在两个任选的坐标轴上的投影的代数和分别等于零，以及各力对于任意一点的矩的代数和也等于零.



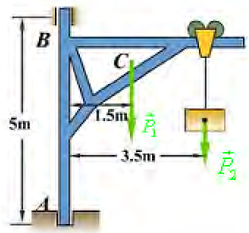
## 第三章 平面任意力系

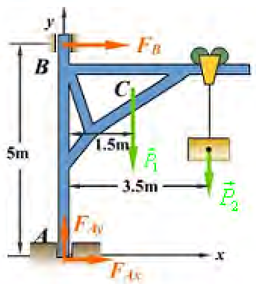
例3-2

已知：$P_1 = 10\text{kN}$, $P_2 = 40\text{kN}$, 尺寸如图；

求：轴承$A$、$B$处的约束力.

解：取起重机，画受力图.




$\sum F_x = 0 \qquad F_{Ax} + F_B = 0$

$\sum F_y = 0 \qquad F_{Ay} - P_1 - P_2 = 0$

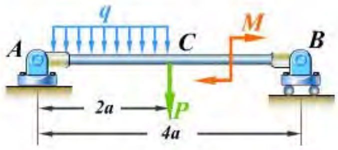
$\sum M_A = 0 \qquad -F_B \cdot 5 - 1.5 \cdot P_1 - 3.5 \cdot P_2 = 0$

解得 $F_{Ay} = 50\text{kN} \quad F_B = -31\text{kN} \quad F_{Ax} = 31\text{kN}$

## 第三章 平面任意力系

例3-3 已知： $P, q, a, M = qa;$

求： 支座*A*、*B*处的约束力.

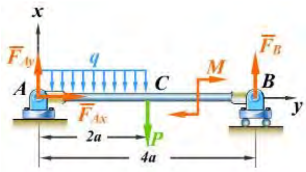



解：取*AB*梁，画受力图.

$\sum F_x = 0 \quad F_{Ax} = 0$ 解得 $F_{Ax} = 0$

$\sum M_A = 0 \quad F_B \cdot 4a - M - P \cdot 2a - q \cdot 2a \cdot a = 0$

$$F_B = \frac{3}{4}P + \frac{1}{2}qa$$




$\sum F_y = 0 \quad F_{Ay} - q \cdot 2a - P + F_B = 0$

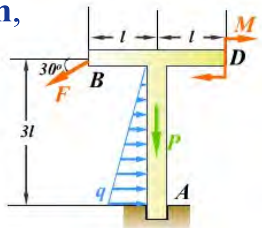
$$F_{Ay} = \frac{P}{4} + \frac{3}{2}qa$$

南京大学 NANJING UNIVERSITY

## 第三章 平面任意力系

例3-4 已知： $P = 100\mathbf{kN}$， $M = 20\mathbf{kN} \cdot \mathbf{m}$，

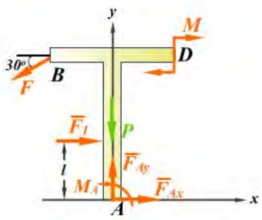
$q = 20\,\mathrm{kN/m}$， $F = 400\mathbf{kN}$， $l = 1\mathbf{m}$；




求： 固定端*A*处的约束力.

解：取*T*型刚架，画受力图.

其中 $F_1 = \frac{1}{2} q \times 3l = 30\mathbf{kN}$




$\sum F_x = 0 \quad F_{Ax} + F_1 - F\sin 60^0 = 0$

$\sum F_y = 0 \quad F_{Ay} - P - F\cos 60^\circ = 0$

$\sum M_A = 0$

$M_A - M - F_1 \cdot l + F\cos 60^\circ \cdot l + F\sin 60^\circ \cdot 3l = 0$

$\Rightarrow$ $F_{Ax} = 316.4\mathbf{kN} \quad F_{Ay} = 300\mathrm{kN} \quad M_A = -1188\mathrm{kN} \cdot \mathrm{m}$

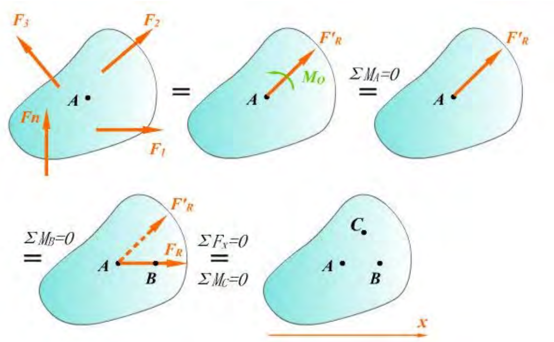
南京大学 NANJING UNIVERSITY

## 第三章 平面任意力系

平面任意力系的平衡方程另两种形式：

$$\begin{cases}\sum F_x = 0 \\ \sum M_A = 0 \\ \sum M_B = 0\end{cases}$$

二矩式




两个取矩点连线，不得与投影轴垂直



## 第三章 平面任意力系

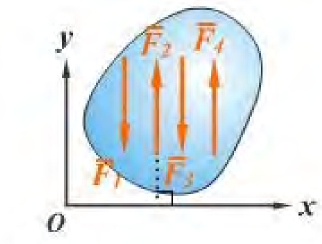
$$\begin{cases}\sum M_A = 0 \\ \sum M_B = 0 \\ \sum M_C = 0\end{cases}$$

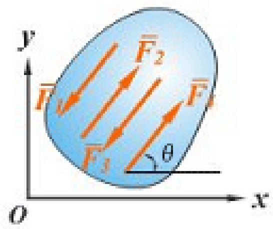
三矩式

三个取矩点，不得共线

# 第三章 平面任意力系

2、平面平行力系的平衡方程




$$\sum F_x = 0 \qquad 0+0+0+\cdots=0$$

$$\sum F_x = 0 \qquad F_1\cos\theta - F_2\cos\theta + F_3\cos\theta + \cdots = 0$$

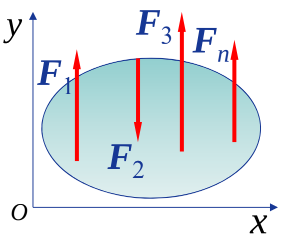
$$\sum F_y = 0 \qquad F_1\sin\theta - F_2\sin\theta + F_3\sin\theta + \cdots = 0$$



# 第三章 平面任意力系

力的作用线在同一平面且相互平行的力系称平面平行力系。

平面平行力系作为平面任意力系的特殊情况，当它平衡时，也应满足平面任意力系的平衡方程，选如图的坐标，则$\sum F_x=0$自然满足。于是平面平行力系的平衡方程为：




$$\sum F_y = 0; \quad \sum M_O(\vec{F}) = 0$$

平面平行力系的平衡方程也可表示为二矩式：

$$\sum M_A(\vec{F}) = 0; \quad \sum M_B(\vec{F}) = 0$$

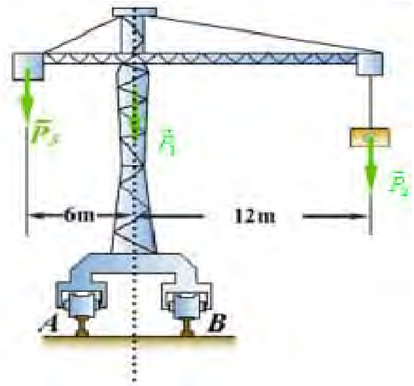
其中$AB$连线不能与各力的作用线平行。

## 第三章 平面任意力系

例　已知： $P_1 = 700\text{kN}, P_2 = 200\text{kN}$， $AB$=4m；

求：(1) 起重机满载和空载时不翻倒，平衡载重$P_3$；

(2) $P_3$=180kN时轨道$AB$给起重机轮子的约束力。




南京大学 NANJING UNIVERSITY

## 第三章 平面任意力系

解： (1) 取起重机，画受力图.

满载时， $\vec{F}_A = 0$, 为不安全状况

$\sum M_B = 0 \qquad P_{3\min} \cdot 8 + 2P_1 - 10P_2 = 0$

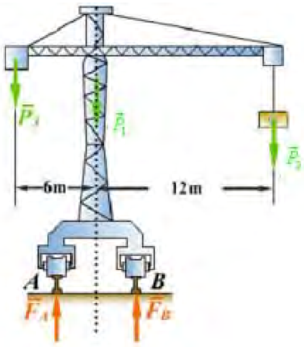
解得　$P_{3\min}$=75kN

空载时， $\vec{F}_B = 0$, 为不安全状况

$\sum M_A = 0 \qquad 4P_{3\max} - 2P_1 = 0$

解得　$P_{3\max}$=350kN

$$75\text{kN} \le P_3 \le 350\text{kN}$$




南京大学 NANJING UNIVERSITY

## 第三章 平面任意力系

(2)$P_3$=180kN时

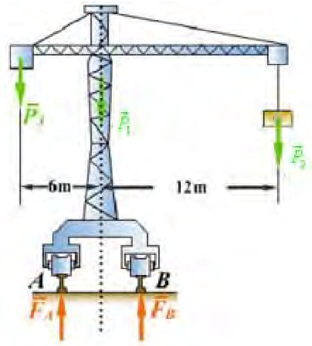
$$\sum M_A = 0$$

$$4P_3 - 2P_1 - 14P_2 + 4F_B = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0$$

$$F_A + F_B - P_1 - P_2 - P_3 = 0$$

$F_A$=210kN　　$F_B$=870kN

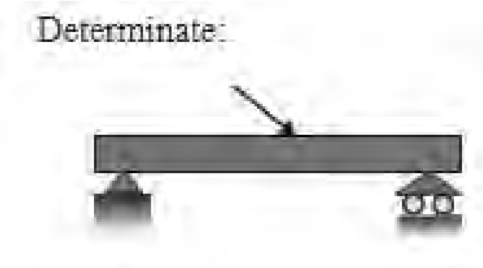





## 第三章 平面任意力系

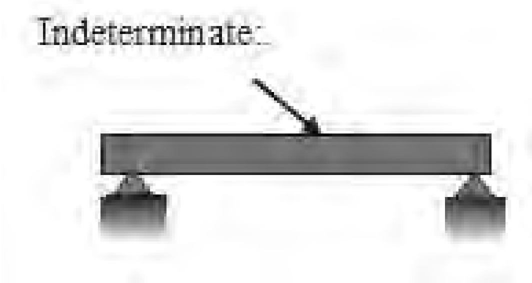
### §3-3　物体系的平衡·静定和超静定问题

对每一种力系而言,若未知量的数目等于独立平衡方程的数目。则应用刚体静力学的理论, 就可以求得全部未知量,这样的问题称为**静定问题**。



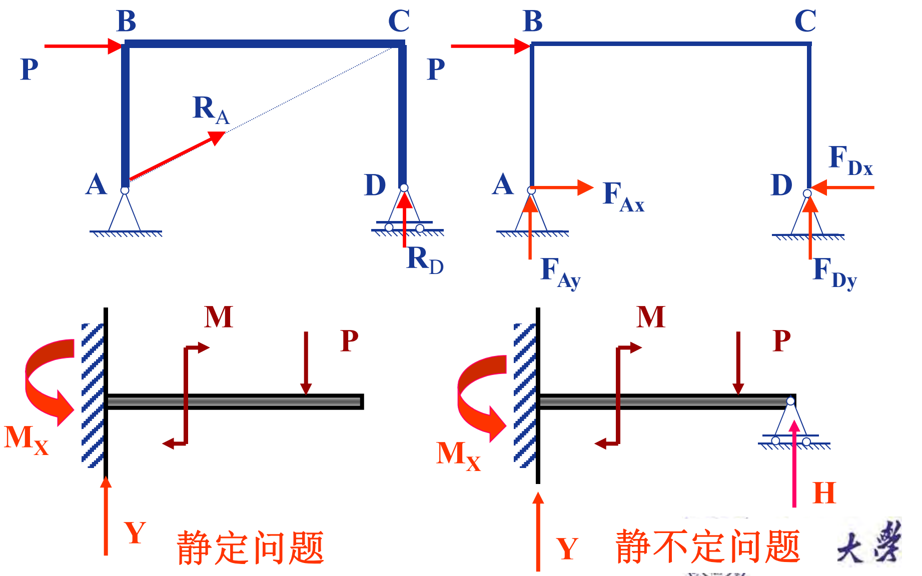
## 第三章 平面任意力系

若未知量的数目超过独立平衡方程的数目。则单独应用刚体静力学的理论,就不能求出全部未知量,这样的问题称为静不定(超静定)问题。



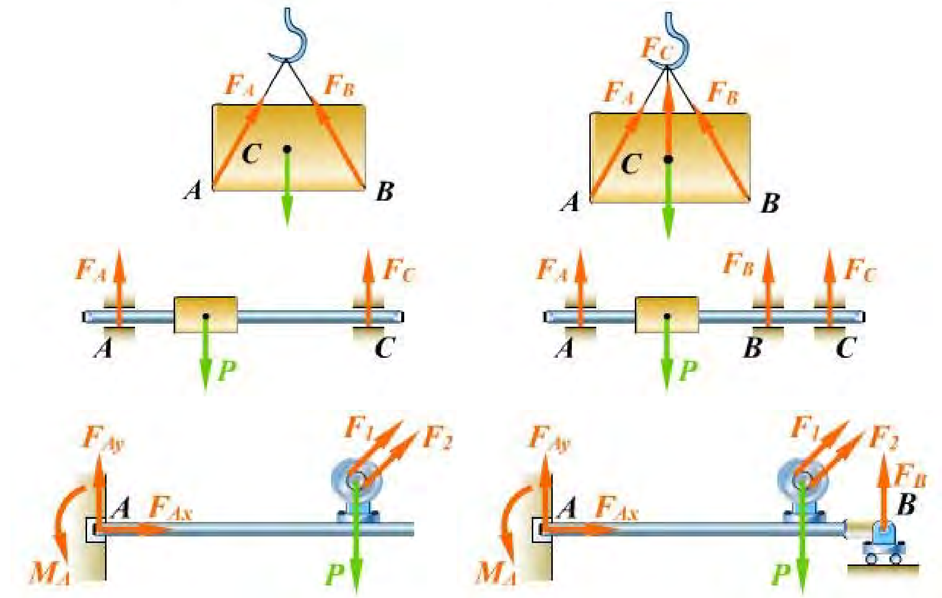

南京大学
NANJING UNIVERSITY

## 第三章 平面任意力系

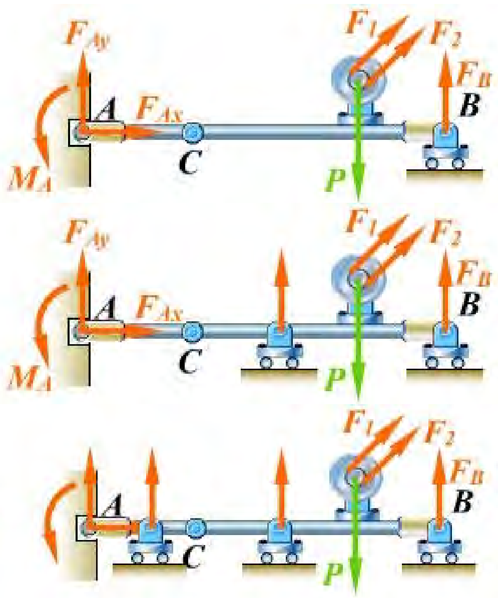



大学
NANJING UNIVERSITY

# 第三章 平面任意力系




# 第三章 平面任意力系




南京大学
NANJING UNIVERSITY

## 第三章 平面任意力系

物体系统是指由若干个物体通过适当的方式相互连接而组成的系统。

当物体系统处于平衡时，其中的每一部分也一定处于平衡。 因此，在解决物体系统的平衡时，既可选取整体为研究对象，也可选取其中的某部分为研究对象，然后列出相应的 平衡方程以解出所需的未知量。

内力：系统内各个物体之间的作用力。

外力：系统外其它物体对系统内物体的作用力。

★ 内力不出现在整体的受力图中。

南京大学 NANJING UNIVERSITY

## 第三章 平面任意力系

物体系统按其构造特点与荷载的传递规律可分为3类

1.有主次之分的物体系

2.无主次之分的物体系

3.运动机构系统

主要部分（基本部分）：能独立承受荷载并维持平衡的部分。

次要部分（附属部分）：必须依赖于主要部分才能承受荷载并维持平衡的部分。

南京大学 NANJING UNIVERSITY

# 第三章 平面任意力系

## 1.有主次之分的物体系

荷载的传递规律是：作用在主要部分上的荷载，不传递给次要部分，也不传递给与它无关的其它主要部分；而作用在次要部分上的荷载，一定要传递给与其相关的主要部分。

先分析次要部分 ⟶ 后分析主要部分（整体）



# 第三章 平面任意力系

## 2.无主次之分的物体系

荷载的传递规律是：作用在某部分上的荷载，一般要通过其相互连接的约束依次传递给其它部分上去，引起相关约束的约束反力。

1）无主次之分但支座在同一水平线或铅垂线上的物体系的平衡。

2）无主次之分但支座不在同一水平线或铅垂线上的物体系的平衡。

先分析整体 ⟶ 后分析某一部分 ⟶ 再分析整体

## 第三章 平面任意力系

### 3、运动机构系统

运动机构：没有完全被约束住，而能实现既定运动的物体系统。

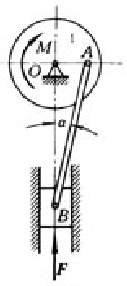
荷载的传递规律是：作用在机构上的主动力，沿机构运动顺序逐个构件进行传递，从而引起各构件的约束反力。

选取研究对象时，通常是由已知到未知依运动传动顺序选取。

南京大学 NANJING UNIVERSITY

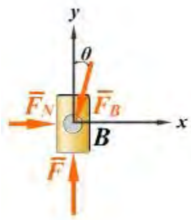
## 第三章 平面任意力系

例3-5　已知：$OA=R, AB=l, \vec{F}$，不计物体自重与摩擦，系统在图示位置平衡；



求：力偶矩$M$ 的大小，轴承$O$处的约束力，连杆$AB$受力，冲头给导轨的侧压力.

解：取冲头$B$, 画受力图.



$$\sum F_y = 0 \quad F - F_B\cos\theta = 0$$

$$\sum F_x = 0 \quad F_N - F_B\sin\theta = 0$$

$$F_B = \frac{F}{\cos\theta} = \frac{Fl}{\sqrt{l^2 - R^2}} \qquad F_N = F\tan\theta = \frac{FR}{\sqrt{l^2 - R^2}}$$

## 第三章 平面任意力系

取轮, 画受力图.

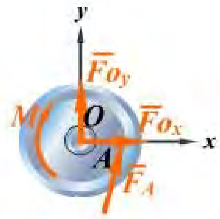
$$\sum F_{ix} = 0 \quad F_{Ox} + F_A \sin\theta = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0 \quad F_{Oy} + F_A \cos\theta = 0$$

$$\sum M_O = 0 \quad F_A \cos\theta \cdot R - M = 0$$

$$F_{Ox} = -\frac{FR}{\sqrt{l^2 - R^2}} \qquad F_{Oy} = -F$$

$$M = FR$$

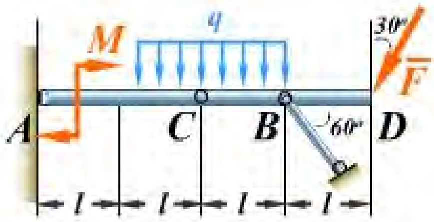


## 第三章 平面任意力系

例3-6　已知：$F$=20kN, $q$=10kN/m, $M = 20\mathrm{kN \cdot m}$、$l$=1m；

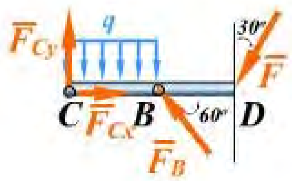
求：A,B处的约束力.

解：取CD梁, 画受力图.



$$\sum M_C = 0$$

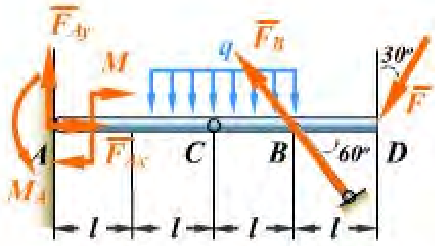
$$F_B \sin 60^\circ \cdot l - ql \cdot \frac{l}{2} - F\cos 30^\circ \cdot 2l = 0$$



⇨ $F_B$=45.77kN

## 第三章 平面任意力系

取整体, 画受力图.




$$\sum F_x = 0$$

$$F_{Ax} - F_B \cos 60^\circ - F \sin 30^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$F_{Ay} - F_B \sin 60^\circ - 2ql - F \cos 30^\circ = 0$$

$$\sum M_A = 0$$

$$M_A - M - 2ql \cdot 2l + F_B \sin 60^\circ \cdot 3l - F \cos 30^\circ \cdot 4l = 0$$

$\Rightarrow$ $M_A = 10.37\text{kN} \cdot \text{m}$ $F_{Ax} = 32.89\text{kN}$ $F_{Ay} = -2.32\text{kN}$

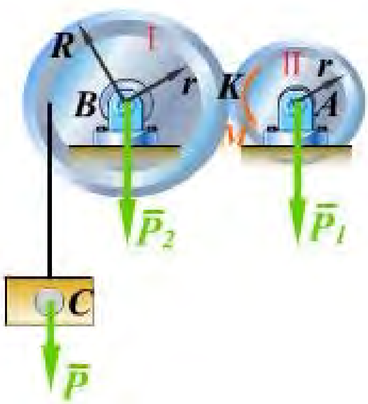
南京大学 NANJING UNIVERSITY

## 第三章 平面任意力系

例3-7 已知：$P_2=2P_1$, $P=20P_1$ , $r$, $R=2r$, $\alpha = 20^\circ$;

求:物$C$ 匀速上升时，作用于小轮上的力偶矩$M$;

轴承$A$，$B$处的约束力.




南京大学 NANJING UNIVERSITY

## 第三章 平面任意力系

解： 取塔轮及重物$C$, 画受力图.

$\sum M_B = 0 \qquad Pr - F\,R = 0 \qquad F = \dfrac{Pr}{R} = 10P_1$

由 $\dfrac{F_r}{F} = \tan 20^0$

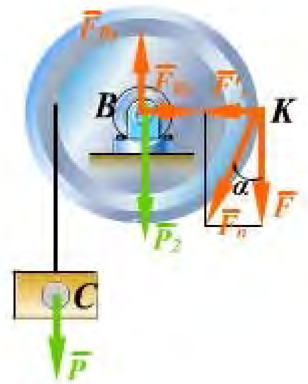
$F_r = F\ \tan 20^0 = 3.64P_1$

$\sum F_x = 0 \qquad F_{Bx} - F_r = 0$

$\sum F_y = 0$

$F_{By} - P - P_2 - F = 0$

⇒ $F_{Bx} = 3.64P_1 \qquad F_{By} = 32P_1$




## 第三章 平面任意力系

取小轮，画受力图.

$\sum F_x = 0 \qquad F_{Ax} + F_r' = 0$

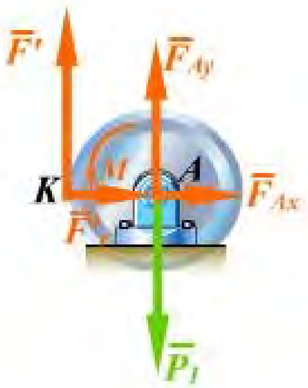
$\sum F_y = 0 \qquad F_{Ay} + F' - P_1 = 0$

$\sum M_A = 0 \qquad M - F' \cdot r = 0$

⇒ $F_{Ax} = -3.64P_1$

$F_{Ay} = -9P_1$

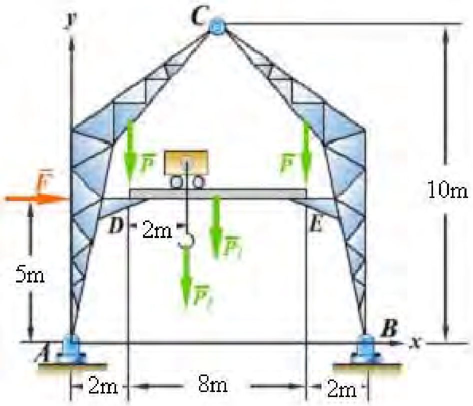
$M = 10P_1 r$




南京大学 NANJING UNIVERSITY

## 第三章 平面任意力系

例3-8 已知：$P$=60kN, $P_1$=20kN, $P_2$=10kN, 风载$F$=10kN, 尺寸如图；求：$A$、$B$处的约束力.




南京大学 NANJING UNIVERSITY

## 第三章 平面任意力系

解： 取整体，画受力图.

$$\sum M_A = 0 \quad 12F_{By} - 10P - 6P_1 - 4P_2 - 2P - 5F = 0$$

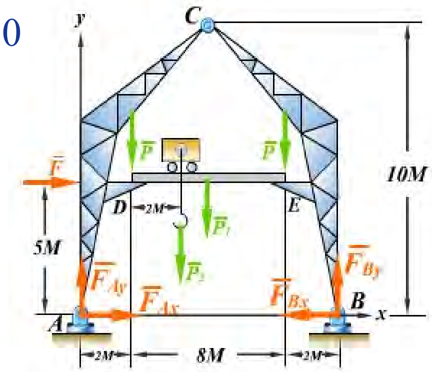
$$\sum F_y = 0 \quad F_{Ay} + F_{By} - 2P - P_1 - P_2 = 0$$

$$\sum F_x = 0 \quad F_{Ax} + F - F_{Bx} = 0$$

$$F_{Ay} = 72.5\text{kN}$$

$$F_{By} = 77.5\text{kN}$$

$$F_{Ax} = F_{Bx} - F$$

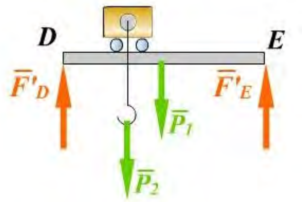


## 第三章 平面任意力系

取吊车梁, 画受力图.

$$\sum M_D = 0 \qquad 8F'_E - 4P_1 - 2P_2 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad F'_E = 12.5\text{kN}$$



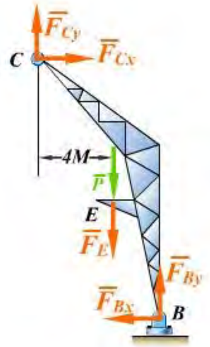

取右边刚架, 画受力图.

$$\sum M_C = 0$$

$$6F_{By} - 10F_{Bx} - 4(P + F_E) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad F_{Bx} = 17.5\textbf{kN}$$

$$F_{Ax} = 7.5\textbf{kN}$$




## 第三章 平面任意力系

例3-9 已知：***a*** **,*b*** **,*P*,**各杆重不计，***C,E***处光滑；

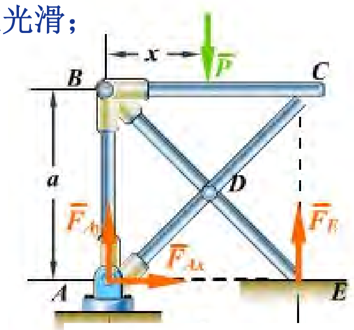
求证： ***AB***杆始终受压，且大小为***P***.

解： 取整体，画受力图.

$$\sum F_x = 0 \qquad F_{Ax} = 0$$

$$\sum M_E = 0 \quad P \cdot (b - x) - F_{Ay} \cdot b = 0$$

得 $F_{Ay} = \dfrac{P}{b}(b - x)$

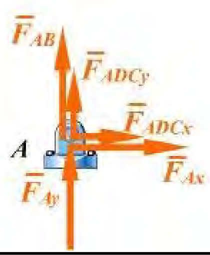



取销钉***A***，画受力图

$$\sum F_x = 0 \qquad F_{Ax} + F_{ADCx} = 0$$

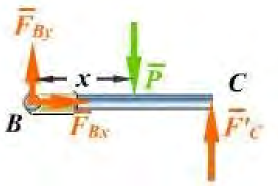
$$\sum F_y = 0 \quad F_{AB} + F_{Ay} + F_{ADCy} = 0$$

得 $F_{ADCx} = 0$



## 第三章 平面任意力系

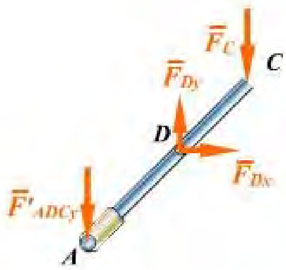
取*BC*，画受力图.




$\sum M_B = 0 \qquad F_C^{'} \cdot b - Px = 0$

得 $\qquad F_C^{'} = \dfrac{x}{b} P$

取*ADC*杆，画受力图.




$\sum M_D = 0 \qquad F_{ADCy}^{'} \cdot \dfrac{b}{2} - F_C \cdot \dfrac{b}{2} = 0$

得 $\qquad F_{ADCy}^{'} = F_C = \dfrac{x}{b} P$

解得 $\qquad F_{AB} = -P$(压)

## 第三章 平面任意力系

解物体系统平衡问题的一般步骤:

**(a)** 分析系统由几个物体组成。

**(b)** 按照便于求解的原则,适当选取整体或部分为研究对象进行受力分析并画受力图。

**(c)** 列平衡方程并解出未知量。

南京大学 NANJING UNIVERSITY

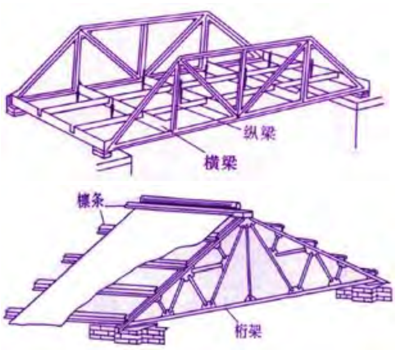
# 第三章 平面任意力系

§3-4　平面简单桁架的内力计算

南京大学
NANJING UNIVERSITY

# 第三章 平面任意力系

桁架(truss)：一种由杆件彼此在两端用铰链连接而成的结构，它在受力后几何形状不变。工程中常见的桁架分为平面桁架和空间桁架。




南京大学
NANJING UNIVERSITY

## 第三章 平面任意力系

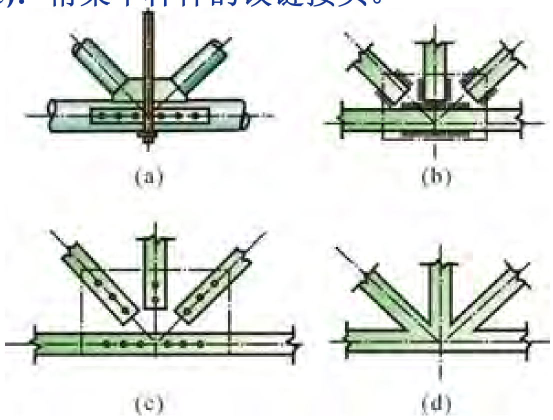
卫星发射塔

塔式起重机



## 第三章 平面任意力系

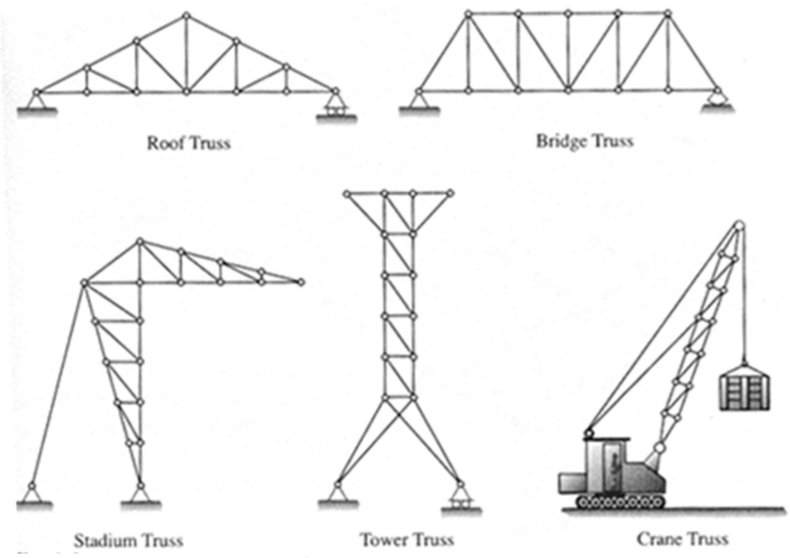
节点(node)：桁架中杆件的铰链接头。




螺栓连接、焊接等均可抽象简化为光滑铰链

南京大学
NANJING UNIVERSITY

## 第三章 平面任意力系






## 第三章 平面任意力系

桁架相关的几段视频

## 第三章 平面任意力系



## 第三章 平面任意力系

关于平面桁架的几点假设：

1、各杆件为直杆，各杆轴线位于同一平面内；

2、杆件与杆件间均用光滑铰链连接；

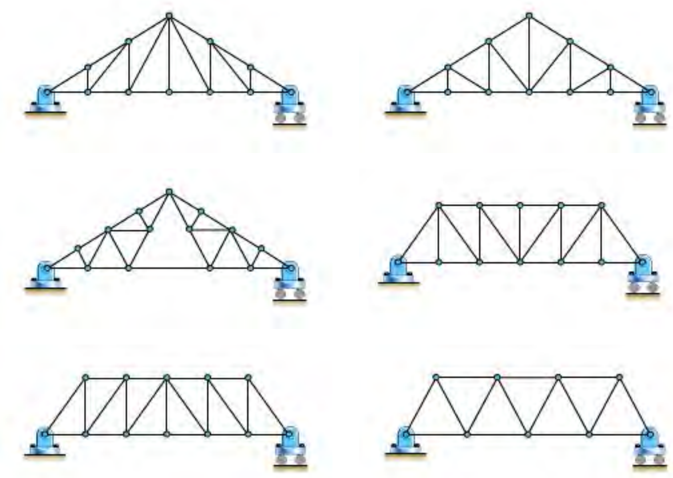
3、载荷作用在节点上，且位于桁架几何平面内；

4、各杆件自重不计或平均分布在节点上。

⟹ 理想桁架

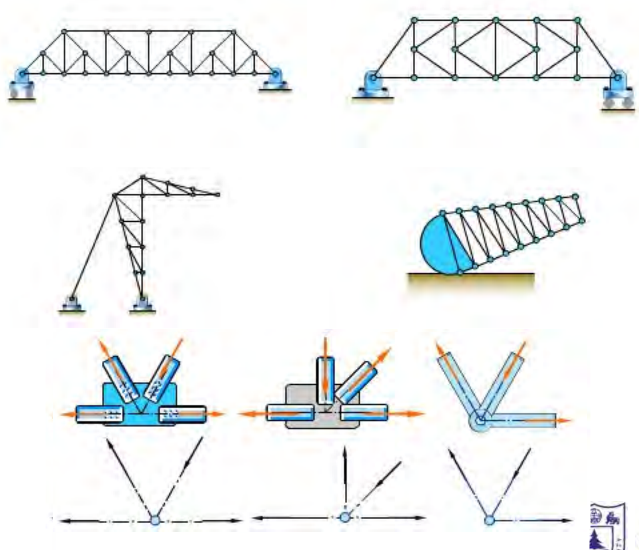
桁架中每根杆件均为二力杆

## 第三章 平面任意力系

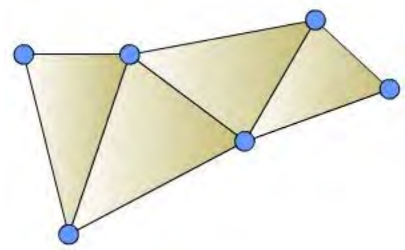




## 第三章 平面任意力系



## 第三章 平面任意力系



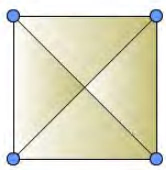
总杆数 $m$　　　　总节点数 $n$

$$m-3=2(n-3)$$

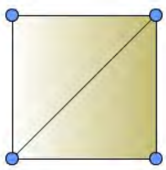
$$m=2n-3$$

## 第三章 平面任意力系

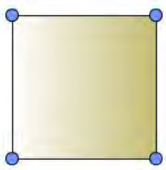
$m>2n-3$　平面复杂（超静定）桁架



$m=2n-3$　平面简单（静定）桁架



$m<2n-3$　非桁架（机构）



## 第三章 平面任意力系

计算桁架杆件内力的两种方法：

1、节点法

2、截面法

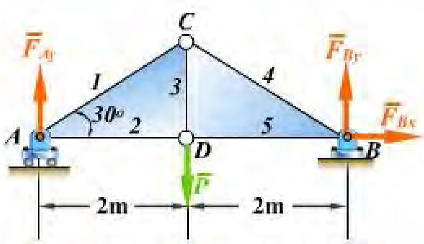


## 第三章 平面任意力系

例3-12 节点法

已知：$P$=10kN, 尺寸如图；

求：桁架各杆件受力.




解：取整体，画受力图.

$$\sum F_x = 0 \qquad F_{Bx} = 0$$

$$\sum M_B = 0 \qquad 2P - 4F_{Ay} = 0 \qquad F_{Ay} = 5\text{kN}$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{Ay} + F_{By} - P = 0 \quad F_{By} = 5\text{kN}$$

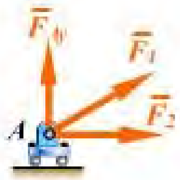
## 第三章 平面任意力系

取节点*A*，画受力图.

$\sum F_y = 0 \qquad F_{Ay} + F_1 \sin 30^0 = 0$

$\sum F_x = 0 \qquad F_2 + F_1 \cos 30^0 = 0$

$F_1 = -10\mathbf{kN}$（压） $F_2 = 8.66\mathbf{kN}$（拉）

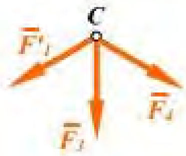



取节点*C*，画受力图.

$\sum F_x = 0 \quad F_4 \cos 30^0 - F_1' \cos 30^0 = 0$

$\sum F_y = 0 \quad -F_3 - \left(F_1' + F_4\right) \sin 30^0 = 0$

$F_4 = -10\mathbf{kN}$（压） $F_3 = 10\mathbf{kN}$（拉）

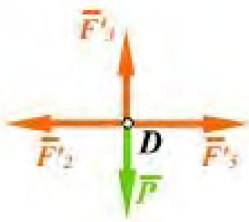



## 第三章 平面任意力系

取节点*D*, 画受力图.

$\sum F_x = 0 \qquad F_5 - F_2' = 0$

$F_5 = 8.66\mathbf{kN}$（拉）



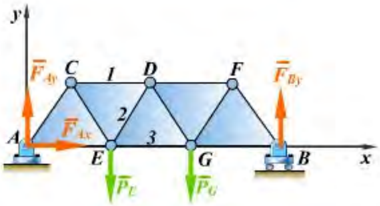

南京大学
NANJING UNIVERSITY

## 第三章 平面任意力系

例3-13(截面法) 已知: $P_E=10\text{kN}$, $P_G=7\text{kN}$,

各杆长度均为1m;求:1, 2, 3杆受力.

解: 取整体,求支座约束力.




$$\sum F_x=0 \qquad F_{Ax}=0$$

$$\sum M_B=0 \quad 2P_E+P_G-3F_{Ay}=0$$

$$\sum F_y=0 \quad F_{Ay}+F_{By}-P_E-P_G=0$$

$$\Rightarrow \qquad F_{Ay}=9\text{kN} \qquad F_{By}=8\text{kN}$$

南京大学 NANJING UNIVERSITY

## 第三章 平面任意力系

用截面法,取桁架左边部分.

$$\sum M_E=0 \qquad -F_1\cdot 1\cdot\cos 30^0-F_{Ay}\cdot 1=0$$

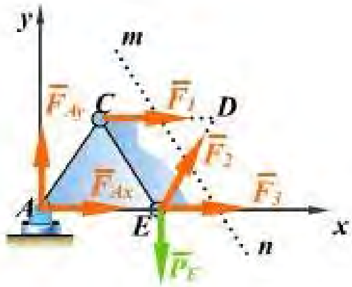
$$\sum F_y=0 \qquad F_{Ay}+F_2\cdot\sin 60^0-P_E=0$$

$$\sum F_x=0 \qquad F_1+F_3+F_2\cos 60^0=0$$

$$\Rightarrow \quad F_1=10.4\textbf{kN}(\text{压})$$

$$F_2=1.15\textbf{kN}(\text{拉})$$

$$F_3=9.81\textbf{kN}(\text{拉})$$



## 第三章 平面任意力系

### 本章小结

1、力线平移定理：作用于刚体上的力 $F$ 的作用线可等效地平移到任意一点 $O$，但须附加一力偶，此附加力偶等于原力对 $O$ 点的矩。

2、平面任意力系向一点简化，可得一个力和一个力偶，力的大小和方向等于主矢的大小和方向，力作用线通过简化中心；力偶的矩等于主矩。

$$\mathbf{F}_R' = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i$$

—— 力系的主矢

$$M_O = \sum_{i=1}^{n} M_O(\mathbf{F}_i)$$

—— 力系对简化中心的主矩

南京大学 NANJING UNIVERSITY

## 第三章 平面任意力系

3、平面任意力系向一点简化的结果分析

（1）主矢不等于零，即 $F_R' \neq 0$

| 主矩 | 合成结果 | 说　　明 |
|---|---|---|
| $M_O = 0$ | 合力 $F_R'$ | 此力为原力系的合力，合力的作用线通过简化中心。 |
| $M_O = 0$ | 合力 $F_R'$ | 此力为原力系的合力，合力的作用线通过简化中心。 |

NANJING UNIVERSITY

## 第三章 平面任意力系

（2）主矢等于零，即$F_R' = 0$

| 主矩 | 合成结果 | 说明 |
|---|---|---|
| $M_O \neq 0$ | 合力偶 | 此力偶为原力系的合力偶，由简化结果彼此等效知：此情况下，主矩与简化中心 $O$ 无关。 |
| $M_O = 0$ | 平 衡 | 重 点 |



## 第三章 平面任意力系

4、平面任意力系平衡的充分必要条件是力系的主矢和力系对任意点的主矩都等于零。

即：　$F_R' = 0$ ，　$M_O = 0$

| 形式 | 一般式 | 二矩式 | 三矩式 |
|---|---|---|---|
| 平衡方程 | $\sum F_x = 0$<br>$\sum F_y = 0$<br>$\sum M_O(\boldsymbol{F}) = 0$ | $\sum F_x = 0$<br>$\sum M_A(\boldsymbol{F}) = 0$<br>$\sum M_B(\boldsymbol{F}) = 0$ | $\sum M_A(\boldsymbol{F}) = 0$<br>$\sum M_B(\boldsymbol{F}) = 0$<br>$\sum M_C(\boldsymbol{F}) = 0$ |

南京大学 NANJING UNIVERSITY

## 第三章 平面任意力系

5、桁架由二力杆铰接而成。求平面静定桁架各杆内力有两种方法

节点法　　桁架的每个节点都受一个平面汇交力系的作用。可以逐个取节点为研究对象，以已知力求出未知力。注意每个节点只允许两个未知力。

截面法　　可以适当地选取一截面把桁架截开，通过平衡方程求解内力未知力。显然，作截面时每次最多截断三根内力未知杆。

南京大學 NANJING UNIVERSITY

# Thank You！

www.slope.com.cn