



第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

世界最高的办公楼——西尔斯大厦 (Sears Tower)

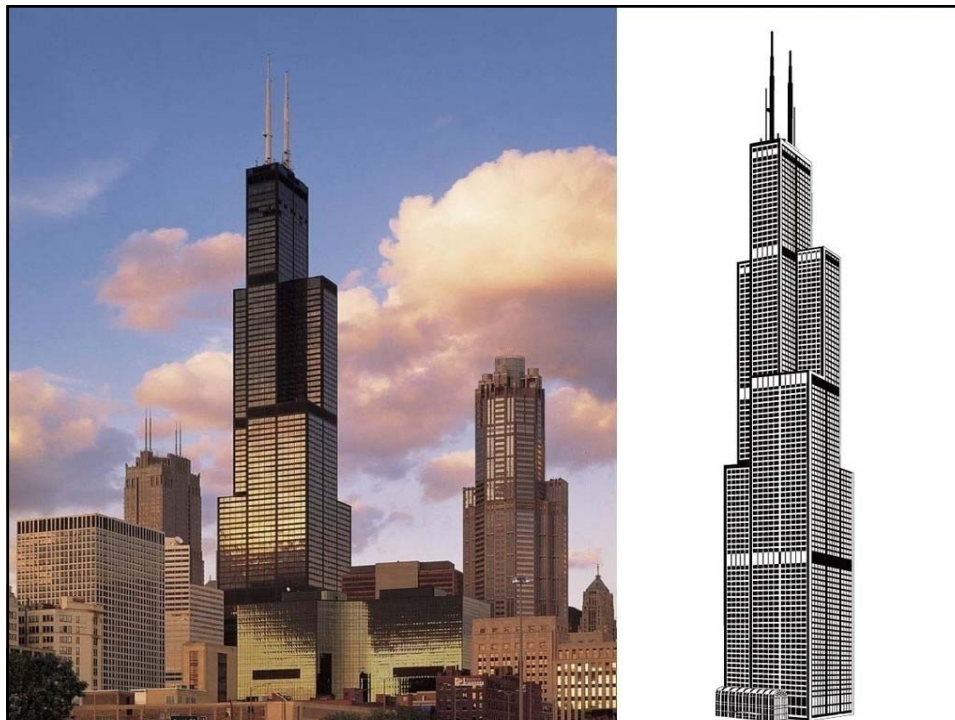
芝加哥不仅拥有一些建于不同时期的摩天大楼的最佳典范，也拥有世界上最高的建筑之一——西尔斯大厦。这座暗色的豪华建筑以443米的高度直冲蓝天。它是为西尔斯—莱巴克公司建造的，于1973年竣工。

西尔斯大厦高443米，地上110层，地下还有3层，包括两个线塔则高达520米，比2000年倒塌的世贸大厦还高出26米。西尔斯大厦由9座塔楼组成。它们的钢结构框架焊接在一起，这样也助于减少因其高度所造成的在风中摇动。所有的塔楼宽度相同，但高度不一。大厦外面的黑色环带巧妙地遮盖了服务性设施区。

西尔斯大厦由西尔斯集团所拥有西尔斯集团员工占用大楼下面的50层，其余出租办公用。每天约的1.65万人到这里上班。

第103层的摩天台(Skydeck)是游人的必到之处，365度的玻璃观望台，投币望远镜，可以俯视伊利若伊尔州、威辛康辛州、印第安纳州以及密执安州。有时还可遇到楼顶太阳高悬，楼下云积雨落的景色。

CHICAGO UNIVERSITY



第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

希尔斯大厦在1974年落成时曾一度是最高的大楼，超越当时纽约的世界贸易中心，在被马来西亚的“国家石油公司双塔大厦”超过之前，它保持了世界上最高建筑物的纪录25年。

根据高楼与都市住宅委员会 (Council on Tall Buildings and Urban Habitat) 目前所使用的四分类建筑物高度判断法，虽然希尔斯大厦在“不含塔尖顶层顶板高度”、“最高使用楼层高度”两项上输给了上海环球金融中心，在“含塔尖建筑结构高度”一项上输给了台北101大楼，但加上楼顶天线后总高527.3米的希尔斯大厦仍拥有四类头衔中的“含天线总高”世界纪录，直至2004年台北101塔建成以前，西尔斯大厦一直保持着“世界最高屋顶”和“世界最高居住层”的桂冠。



第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

3D PUZZLE
CubicFun



第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

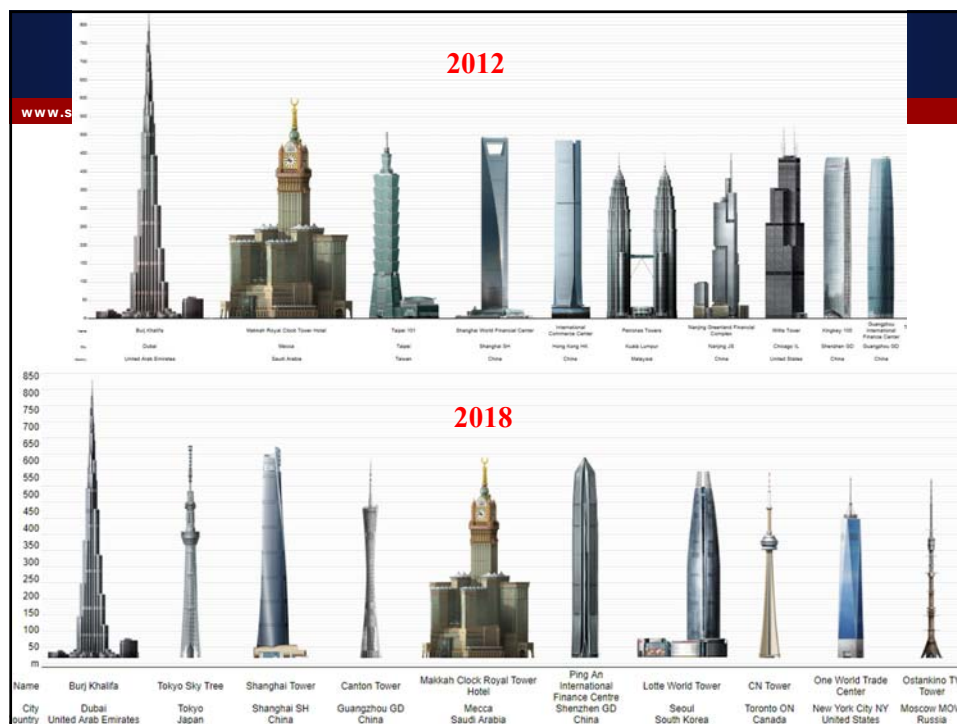
大厦结构工程师是美籍建筑师F.卡恩。他为解决像西尔斯大厦这样的高层建筑的关键性抗风结构问题，提出了束筒结构体系的概念并付诸实践。整幢大厦被当作一个悬挑的束筒空间结构，离地面越远剪力越小，大厦顶部由风压引起的振动也明显减轻。大厦采用由钢框架构成的束筒结构体系，外部用黑铝和镀层玻璃幕墙围护。其外形的特点是逐渐上收的，即1~50层为9个宽度为23.86米的方形筒组成的正方形平面；51~66层截去一对对角方筒单元；67~90层再截去另一对对角方筒单元，形成十字形；91~110层由两个方筒单元直升到顶。这样，既可减小风压，又取得外部造型的变化效果。

大厦顶部设计风压为305千克力/平方米(3千帕)，设计允许位移(振动时允许产生的振幅)为建筑总高度的1/500，即900毫米，建成后最大风速时实测位移为460毫米。所有的塔楼宽度相同，但高度不一。

Y

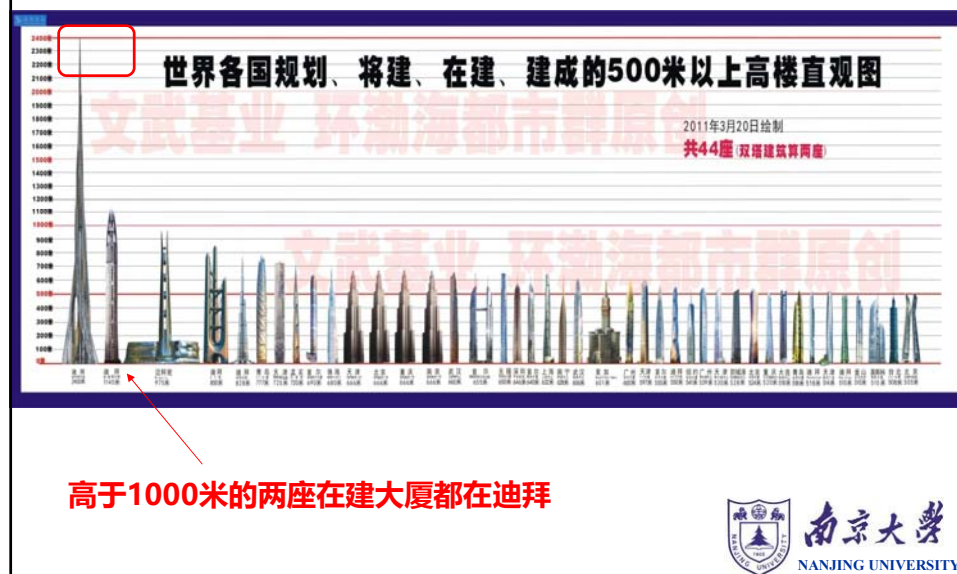
世界400米以上10大高楼

1. 哈利法塔(原名迪拜塔)：位于阿联酋迪拜。总高828米，168层。2004年9月21日开始动工，2010年1月4日竣工启用，为现今世界第一高楼。
2. 深圳平安金融中心大厦：总高646米，主体高度588米。将于2014年竣工完成。
3. 上海中心：大厦的主楼共有127层，总高632米，结构高度为565.6米。约在2014年竣工完成。
4. 台北101大楼：位于中国台湾省台北市信义区，总高509米，101层。
5. 上海环球金融中心：位于中国上海陆家嘴，总高度492米，地上101层，地下3层，建筑面积381600m²，为中国大陆第一高楼，世界最高的平顶式建筑。
6. 吉隆坡双塔大楼：马来西亚国家石油公司双塔大楼位于吉隆坡市中心美芝律，高451.9米，共88层。1996年2月13日竣工，保持了7年多的世界第一高楼的头衔。
7. 西尔斯大厦：位于美国芝加哥，高442米(527.3米含天线)，108层。为世界最高的办公用楼。
8. 南京紫峰大厦：位于南京市鼓楼区鼓楼广场，高450米，89层，为江苏省第一高楼。
9. 京基100中心广场：位于深圳，总高441.8米，共98层，已于2011年4月23日主体封顶。
10. 广州珠江新城双塔之西塔：设计高度为410米，已于2009年竣工。



第二章 力系的等效和简化

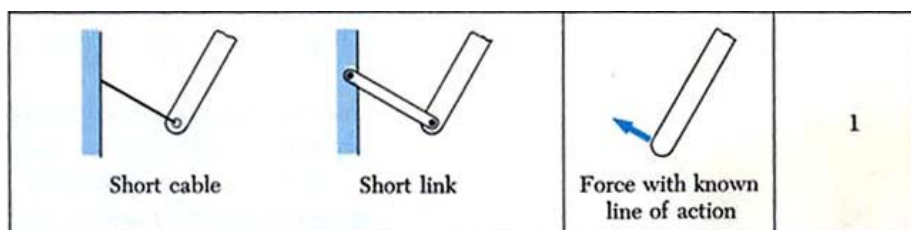
www.slope.com.cn



第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

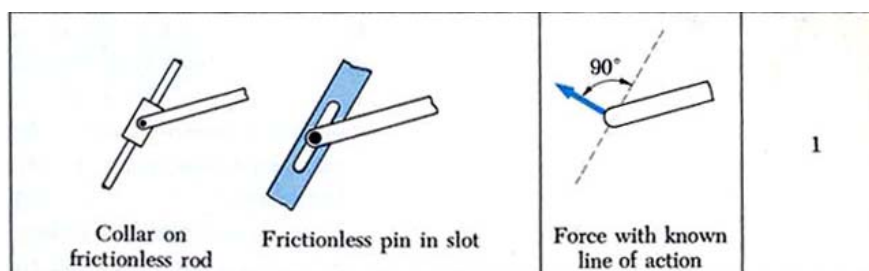
约束类型回顾



第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

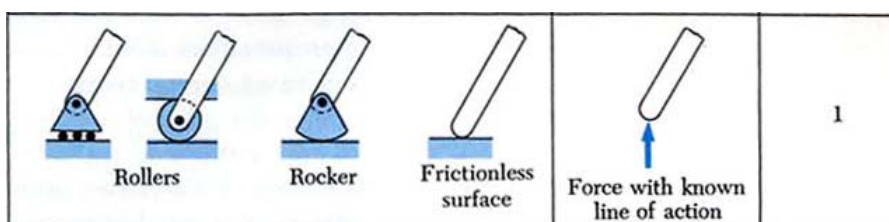
约束类型回顾



第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

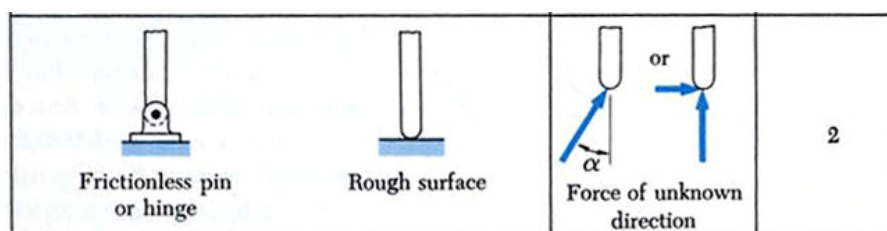
约束类型回顾



第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

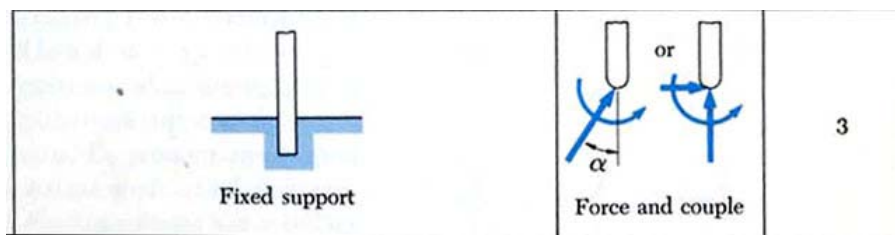
约束类型回顾



第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

约束类型回顾



第二章 力系

www.slope.com.cn

常见支座类型：

- 活动铰支座 roller
- 固定铰支座 pin
- 固定支座 fixed
- 滑动支座 sliding

常见结点类型：

- 铰结点
- 刚结点

Type of connection	Reaction
 Cable	 One unknown: F
 Roller	 One unknown: F
 External pin	 Two unknowns: F_x, F_y
 Internal pin	 Two unknowns: F_x, F_y
 Fixed support	 Three unknowns: F_x, F_y, M

第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

§2-1 平面汇交力系的合成与平衡

§2-2 空间汇交力系的合成与平衡

§2-3 平面力对点的矩

§2-4 平面力偶系的合成与平衡



第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

教学基本要求

- 掌握平面、空间汇交力系合成与平衡的几何法、解析法
- 能熟练解决汇交力系的平衡问题
- 理解平面力矩的概念，掌握平面力矩的计算方法
- 深刻理解力偶、力偶矩的概念和力偶的性质，力偶系的合成与平衡计算方法



第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

§2-1 平面汇交力系的合成与平衡

几个定义：

汇交力系(force system) —— 各力的作用线均汇交于一点的力系。

力 偶(couple) —— 作用线平行、指向相反而大小相等的两个力。

平面力系(coplanar force system) —— 各力的作用线都在同一平面内的力系。否则为空间力系。

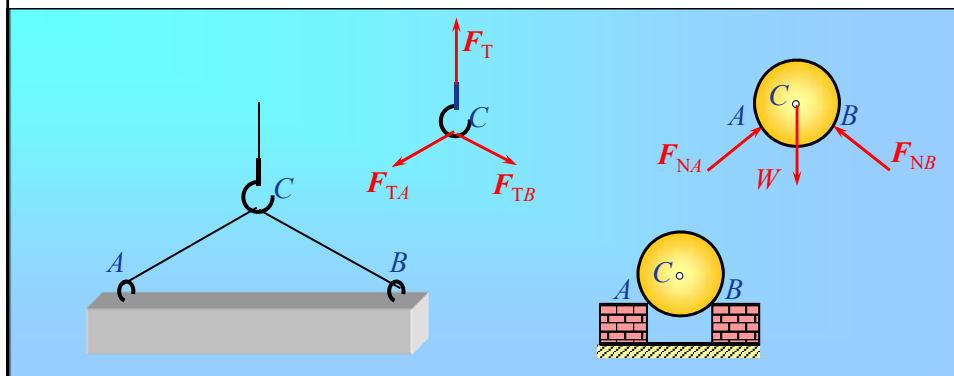


第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

平面力系的基本类型

{ 汇交力系
 力 偶 系
 任意力系



第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

一、合成(Addition)的几何法



表达式： $F_R = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$



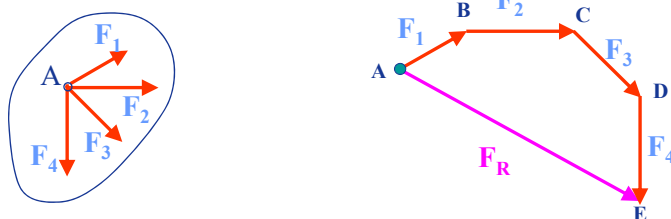
第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

● 力的多边形规则

把各力矢首尾相接(**tip-to tail addition**)，形成一条有向折线段（称为**力链**）。

加上一封闭边，就得到一个多边形，称为**力多边形**。



第二章 力系的等效和简化

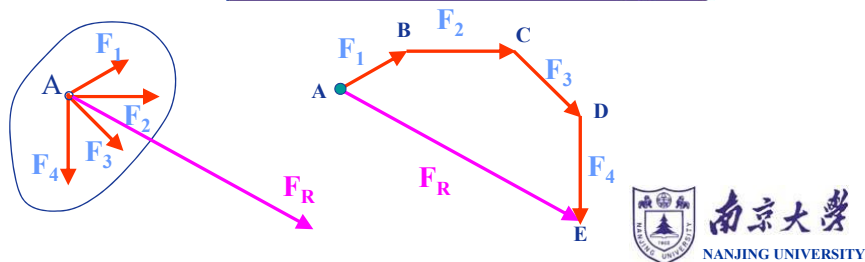
www.slope.com.cn

● 平面汇交力系的合成结果

平面汇交力系可以合成为一个力，合力作用在力系的公共作用点，它等于这些力的矢量和，并可由这力系的力多边形的封闭边表示。

矢量的表达式：

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i$$



第二章 力系的等效和简化

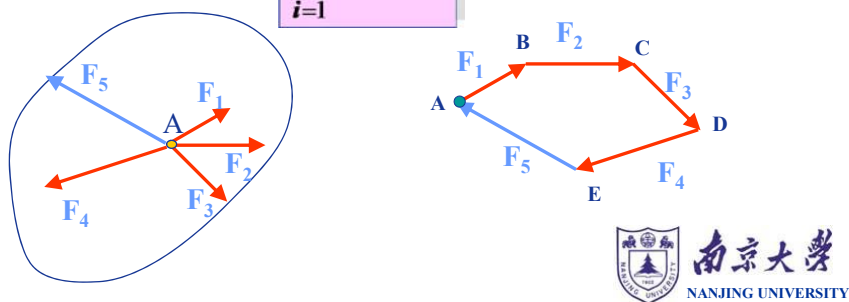
www.slope.com.cn

二、汇交力系平衡的几何条件

汇交力系平衡的充分必要几何条件为：

该力系的力多边形自行封闭，即力系中各力的矢量和于零。

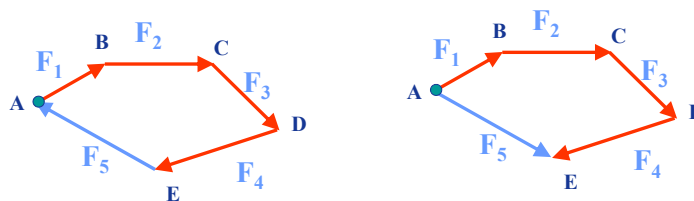
$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = 0$$



第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

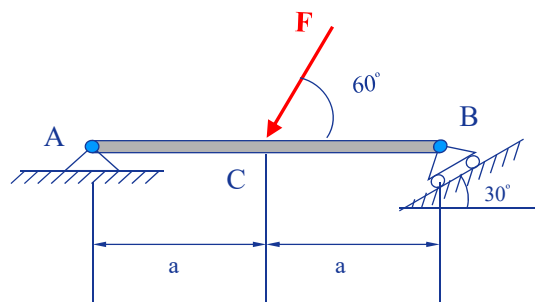
比较下面两力多边形，哪个是平衡状态？



第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

例 2-1 水平梁AB中点C作用着力F，其大小等于2kN，方向与梁的轴线成 60° 角，支承情况如图所示，试求固定铰链支座A和活动铰链支座B的约束力，梁的自重不计。



第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

解： 1. 取梁AB作为研究对象。

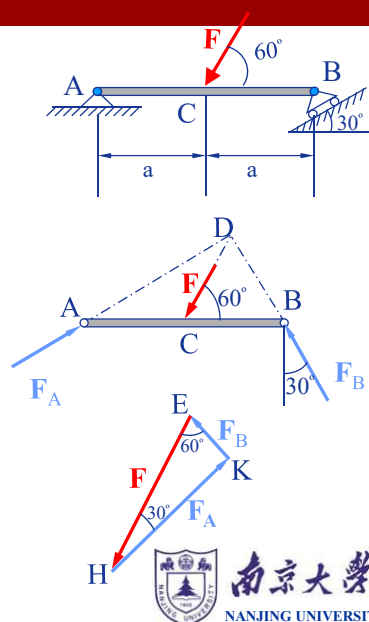
2. 画出受力图。

3. 应用平衡条件画出 F ， F_A 和 F_B 的闭合力三角形。

4. 解得

$$F_A = F \cos 30^\circ = 17.3 \text{ kN}$$

$$F_B = F \sin 30^\circ = 10 \text{ kN}$$

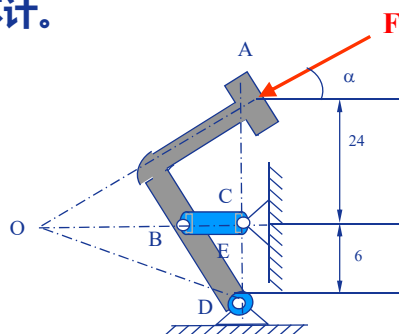


南京大学
NANJING UNIVERSITY

第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

例2-2 如图所示是汽车制动机构的一部分。司机踩到制动蹬上的力 $F=212\text{N}$ ，方向与水平面成 $\alpha=45^\circ$ 。当平衡时，BC水平，AD铅直，试求拉杆所受的力。已知 $EA=24\text{cm}$ ， $DE=6\text{cm}$ (点E在铅直线DA上)，又B、C、D都是光滑铰链，机构的自重不计。



南京大学
NANJING UNIVERSITY

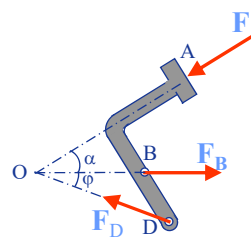
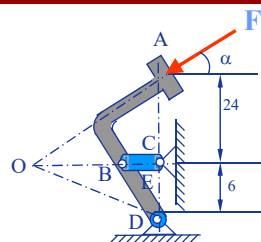
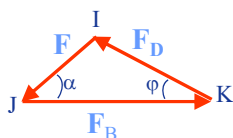
第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

解：1. 取制动蹬ABD作为研究对象。

2. 画出受力图。

3. 应用平衡条件画出 F ， F_B 和 F_D 的闭合力三角形。



南京大学
NANJING UNIVERSITY

第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

4. 由几何关系得 $OE = EA = 24 \text{ cm}$

$$\Rightarrow \tan \varphi = \frac{DE}{OE} = \frac{6}{24} = \frac{1}{6}$$

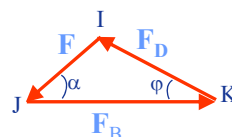
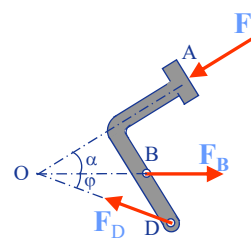
$$\Rightarrow \varphi = \arctan \frac{1}{6} = 14^\circ 2'$$

由力三角形可得

$$F_B = \frac{\sin(180^\circ - \alpha - \varphi)}{\sin \varphi} F$$

5. 代入数据，求得 $F_B = 750 \text{ N}$

方向自左向右。



南京大学
NANJING UNIVERSITY

第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

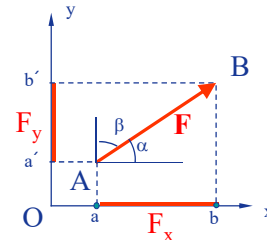
三、平面汇交力系的解析法合成

1. 合力投影定理

● 力在坐标轴上的投影

$$F_x = F \cos \alpha$$

$$F_y = F \cos \beta$$



结论：力在某轴上的投影，等于力的模乘以力与该轴正向间夹角的余弦。

反之，当投影 F_x , F_y 已知时，则可求出力 F 的大小和方向：

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad \cos \alpha = \frac{F_x}{F}, \quad \cos \beta = \frac{F_y}{F}$$



南京大学
NANJING UNIVERSITY

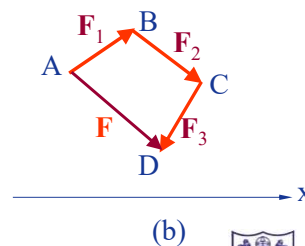
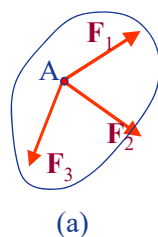
第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

● 合力投影定理

合力在任一轴上的投影，等于它的各分力在同一轴上的投影的代数和。

证明：以三个力组成的汇交力系为例。设有三个汇交力 F_1 , F_2 , F_3 如图a。



南京大学
NANJING UNIVERSITY

第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

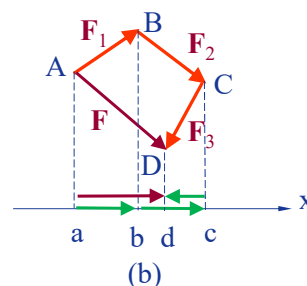
各力在 x 轴上投影

$$F_{1x} = ab, \quad F_{2x} = bc, \quad F_{3x} = -dc$$

合力 F 在 x 轴上投影得 $F_x = ad$

由图知 $ad = ab + bc + (-dc)$

$$F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}$$



推广到任意多个力 $F_1, F_2, \dots, F_n$ 组成的平面汇交力系, 可得

$$F_x = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = \sum F_x$$



南京大学
NANJING UNIVERSITY

第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

2. 平面汇交力系合成的解析法

根据合力投影定理得

$$F_x = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = \sum F_{ix}$$

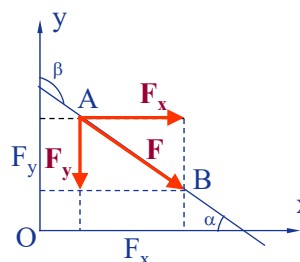
$$F_y = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = \sum F_{iy}$$

合力的大小:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(\sum F_{ix})^2 + (\sum F_{iy})^2}$$

合力的方向余弦:

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{F} = \frac{\sum F_{ix}}{F}, \quad \cos \beta = \frac{F_y}{F} = \frac{\sum F_{iy}}{F}$$



南京大学
NANJING UNIVERSITY

第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

3. 平面汇交力系平衡的解析条件

平面汇交力系平衡的充要解析条件是

力系中所有各力在两个坐标轴中每一轴上的投影的代数和分别等于零

平面汇交力系的平衡方程

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_{ix} = \sum X = 0 \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = \sum Y = 0 \end{cases}$$

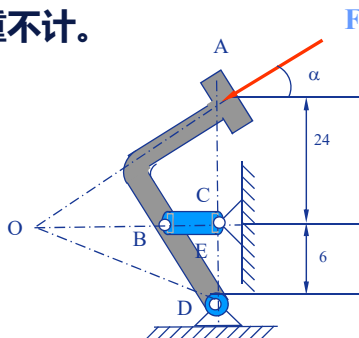
一个平面汇交力系只有两个独立的平衡方程，只能求解两个未知数！



第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

例2-3 如图所示是汽车制动机构的一部分。司机踩到制动蹬上的力 $F=212\text{ N}$ ，方向与水平面成 $\alpha=45^\circ$ 。当平衡时，BC水平，AD铅直，试求拉杆所受的力。已知 $EA=24\text{ cm}$ ， $DE=6\text{ cm}$ (点E在铅直线DA上)，又B，C，D都是光滑铰链，机构的自重不计。



第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

解： 1. 取制动蹬ABD作为研究对象。

2. 画出受力图。

3. 列平衡方程。

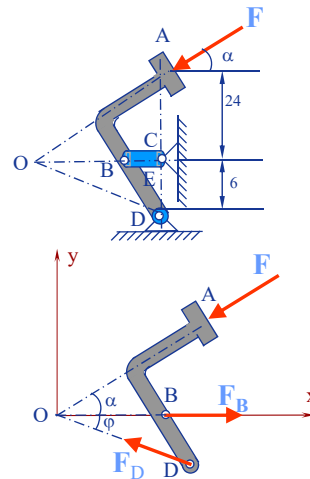
$$\sum F_x = 0, \quad F_B - F \cos 45^\circ - F_D \cos \varphi = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_D \sin \varphi - F \sin 45^\circ = 0$$

已知 $\varphi = 14^\circ 2'$
 $\sin \varphi = 0.243$, $\cos \varphi = 0.969$

联立求解，得

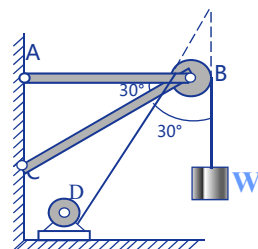
$$F_B = 750 \text{ N}$$



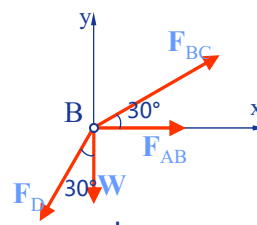
第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

例2-4 利用绞车绕过定滑轮B的绳子吊起一重 $W=20 \text{ kN}$ 的货物，滑轮由两端铰链的水平刚杆AB和斜刚杆BC支持于点B (图a)。不计绞车的自重，试求杆AB和BC所受的力。



(a)



(b)

解：

1. 取滑轮B(带轴销)作为研究对象。

2. 画出受力图 (b)。



第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

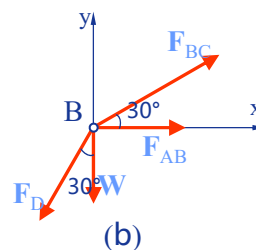
3. 列平衡方程。

$$\sum F_x = 0$$

$$F_{BC} \cos 30^\circ + F_{AB} - F_D \sin 30^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$F_{BC} \cos 60^\circ - W - F_D \cos 30^\circ = 0$$



联立求解,得

$$F_{AB} = -54.5 \text{ kN}, \quad F_{BC} = 74.5 \text{ kN}$$

反力 F_{AB} 为负值, 说明该力实际指向与图上假定指向相反。

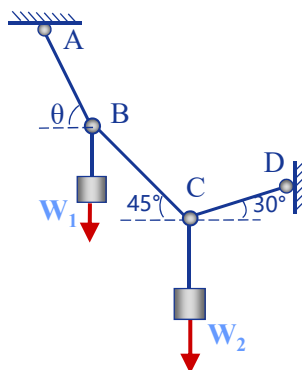
即杆 AB 实际上受拉力。



第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

例2-5 如图已知 $W_1 = 100 \text{ kN}$, $W_2 = 250 \text{ kN}$ 。不计各杆自重, A, B, C, D各点均为光滑铰链。试求平衡状态下杆 AB 内力及与水平的夹角。

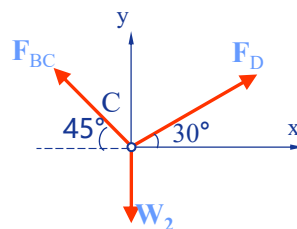
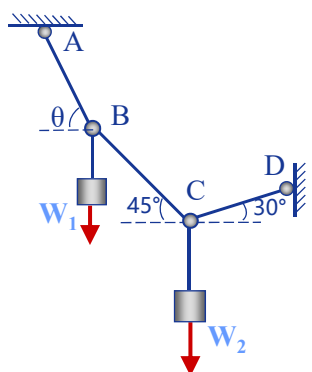


第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

解：

1. 取销钉C作为研究对象。



$$\sum F_x = 0$$

$$F_D \cos 30^\circ - F_{BC} \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$F_D \cos 60^\circ - W_2 + F_{BC} \sin 45^\circ = 0$$

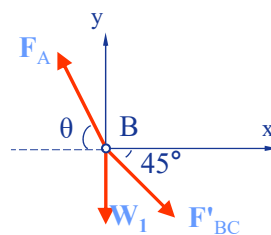
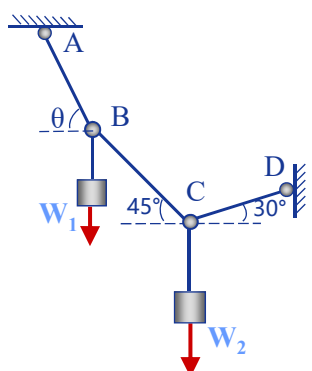


南京大学
NANJING UNIVERSITY

第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

2. 取销钉B作为研究对象。



$$\sum F_x = 0$$

$$F'_{BC} \cos 45^\circ - F_A \cos \theta = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$F_A \sin \theta - W_1 - F'_{BC} \sin 45^\circ = 0$$



南京大学
NANJING UNIVERSITY

第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

$$F_D \cos 30^\circ - F_{BC} \cos 45^\circ = 0 \quad (1)$$

$$F_D \cos 60^\circ - W_2 + F_{BC} \sin 45^\circ = 0 \quad (2)$$

$$F'_{BC} \cos 45^\circ - F_A \cos \theta = 0 \quad (3)$$

$$F_A \sin \theta - W_1 - F'_{BC} \sin 45^\circ = 0 \quad (4)$$

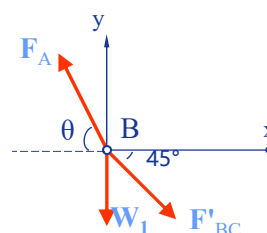
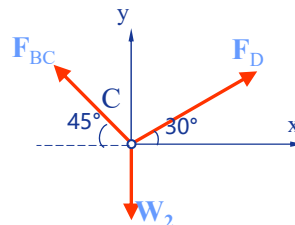
由式 (1)、(2) 解得

$$F_{BC} = 224.23 \text{ kN}$$

代入 (3)、(4) 解得

$$\tan \theta = 1.631, \quad \theta = 58.5^\circ$$

$$F_A = 303.29 \text{ kN}$$



南京大学
NANJING UNIVERSITY

第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

投影法的符号法则：

当由平衡方程求得某一未知力的值为负时，表示原先假定的该力指向和实际指向相反。



南京大学
NANJING UNIVERSITY

第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

解析法求解平面汇交力系平衡问题的一般步骤:

1. 选分离体，画受力图。分离体选取应最好含题设的已知条件。
2. 在力系平面内选坐标系。
3. 将各力向二坐标轴投影，并应用平衡方程

$$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0$$

求解。

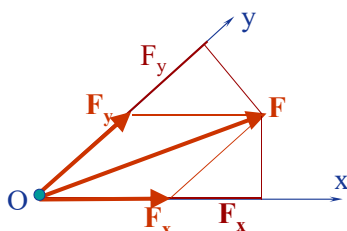


第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

思考题

- 应用解析法求解平面汇交力系平衡问题，取不同的直角坐标系时，所求合力是否相同？
- 应用解析法求解平面汇交力系平衡问题时，所取的投影轴是否一定要互相垂直？
- 力沿两轴分力的大小和在该两轴上的投影大小相等吗？



第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

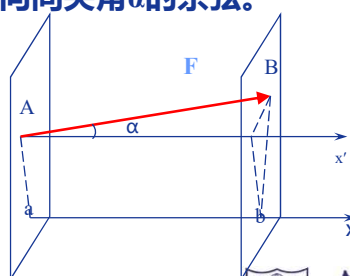
§2-2 空间汇交力系的合成与平衡

一、力的投影

1. 力在轴上的投影

在空间情况下，力 F 在 x 轴上投影，与平面情形相似，等于这个力的模乘以这个力与 x 轴正向间夹角 α 的余弦。

$$F_x = F \cdot \cos \alpha$$



第二章 力系的等效和简化

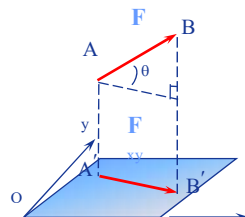
www.slope.com.cn

2. 力在平面上的投影

由力矢 F 的始端 A 和末端 B 向投影平面 oxy 引垂线，由垂足 A' 到 B' 所构成的矢量 $A'B'$ ，就是力 F 在平面 Oxy 上的投影，记为 F_{xy} 。

力 F_{xy} 的大小：

$$F_{xy} = F \cos \theta$$



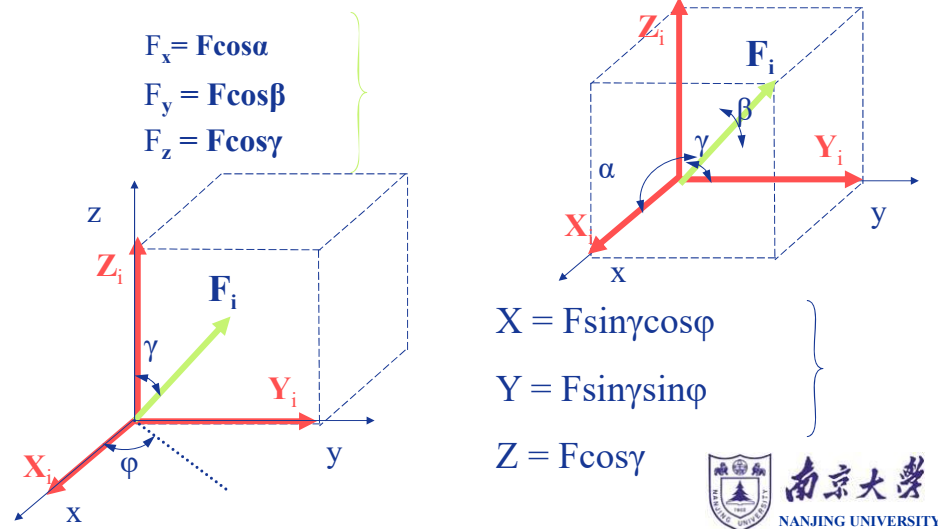
● **注意：**力在轴上的投影是一代数量。力在一平面上的投影仍是一矢量。



第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

1、力在直角坐标轴上的投影



第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

二、力在直角坐标轴上的投影：

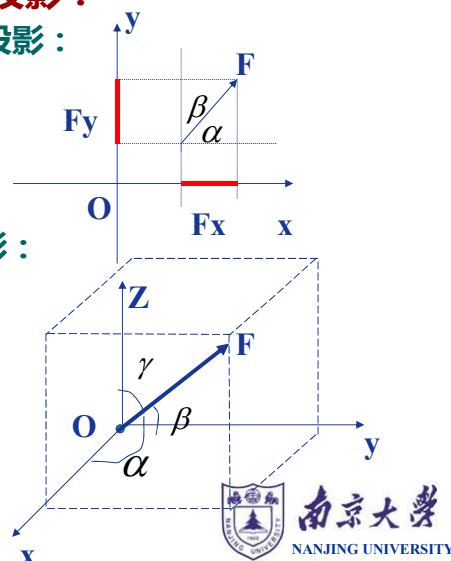
1、力在平面直角坐标轴上的投影：

$$\left\{ \begin{aligned} F_x &= F \cos \alpha \\ F_y &= F \cos \beta \end{aligned} \right.$$

2、力在空间直角坐标轴上的投影：

一次投影法：

$$\left\{ \begin{aligned} F_x &= F \cos \alpha \\ F_y &= F \cos \beta \\ F_z &= F \cos \gamma \end{aligned} \right.$$



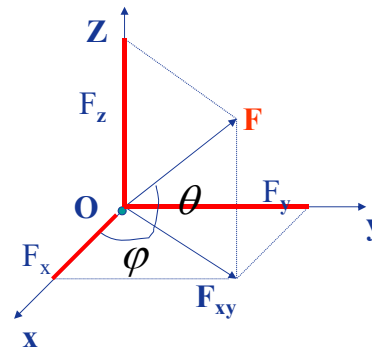
第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

二次投影法：

已知力 $\mathbf{F}$ 和某一平面 (oxy) 的夹角为 θ ，又已知力 $\mathbf{F}$ 在该平面上的投影与某一轴的夹角为 φ

$$\left\{ \begin{aligned} F_x &= F_{xy} \cos \varphi \\ &= F \cos \theta \cos \varphi \\ F_y &= F_{xy} \sin \varphi \\ &= F \cos \theta \sin \varphi \\ F_z &= F \sin \theta \end{aligned} \right.$$



第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

2、力在空间直角坐标轴上的分力

$$\vec{F}_x = F_x \vec{i} \quad \vec{F}_y = F_y \vec{j} \quad \vec{F}_z = F_z \vec{k}$$

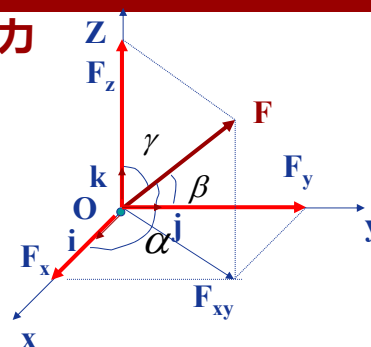
$$\begin{aligned} \therefore \vec{F} &= \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z \\ &= F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} \end{aligned}$$

力 $\mathbf{F}$ 的解析式

若已知投影 F_x 、 F_y 、 F_z ，则力 $\mathbf{F}$ 的大小和方向为：

$$\text{大小: } F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

$$\text{方向: } \cos \alpha = \frac{F_x}{F}; \cos \beta = \frac{F_y}{F}; \cos \gamma = \frac{F_z}{F}$$



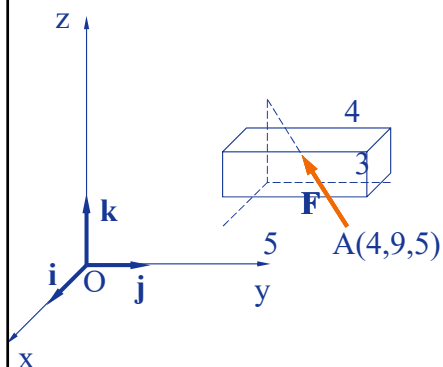
第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

例2-6 图中力 F 的大小为10kN，求的力 F 在 x 、 y 、 z 三坐标轴的投影。(长度单位为m)

解：

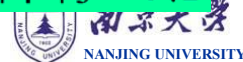
1、先求 F 的三个方向余弦



$$\cos(F, i) = \frac{-4}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2}} = \frac{-4}{5\sqrt{2}}$$

$$\cos(F, j) = \frac{-5}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

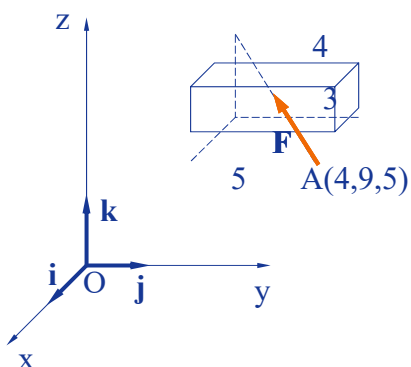
$$\cos(F, k) = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2}} = \frac{3}{5\sqrt{2}}$$



第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

2、求力的投影 ($F = 10\text{kN}$) 已算得：



$$\cos(F, i) = \frac{-4}{5\sqrt{2}}$$

$$\cos(F, j) = \frac{-5}{5\sqrt{2}};$$

$$\cos(F, k) = \frac{3}{5\sqrt{2}}$$

$$F_x = F \cos(F, i) = -\frac{4}{5\sqrt{2}} 10 = -4\sqrt{2} \text{ (kN)}$$

$$F_y = F \cos(F, j) = -\frac{1}{\sqrt{2}} 10 = -5\sqrt{2} \text{ (kN)}$$

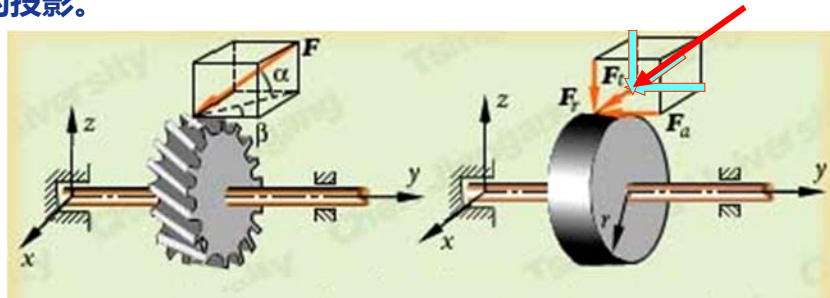
$$F_z = F \cos(F, k) = \frac{3}{5\sqrt{2}} 10 = 3\sqrt{2} \text{ (kN)}$$



第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

例2-7 半径 r 的斜齿轮，其上作用力 F 如图所示。求力在坐标轴上的投影。



解： $F_x = F_t = F \cos \alpha \sin \beta$

切向力、周向力

$F_y = F_a = -F \cos \alpha \cos \beta$

轴向力

$F_z = F_r = -F \sin \alpha$

径向力

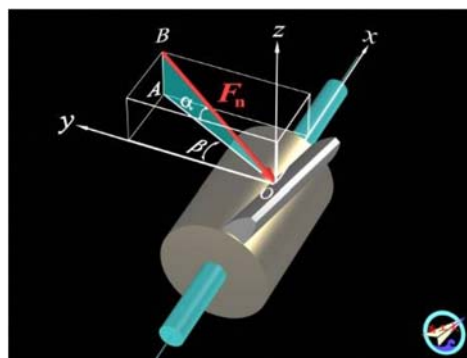


南京大学
NANJING UNIVERSITY

第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

例2-8 如图所示圆柱斜齿轮，其上受啮合力 F_n 的作用。已知斜齿轮的啮合角(螺旋角) β 和压力角 α ，试求力 F_n 沿 x ， y 和 z 轴的分力。

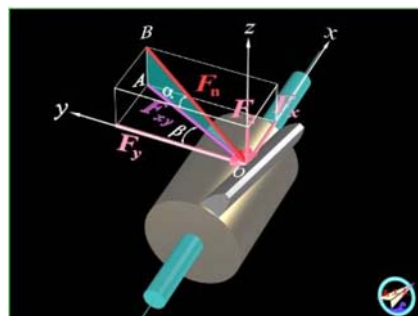
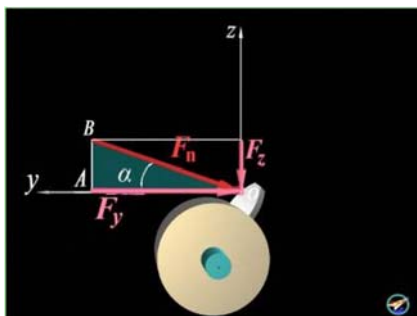


南京大学
NANJING UNIVERSITY

第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

解： 将力 F_n 向 z 轴和 Oxy 平面投影



$$F_z = -F_n \sin \alpha$$

$$F_{xy} = F_n \cos \alpha$$



南京大学
NANJING UNIVERSITY

第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

将力 F_{xy} 向 x 和 y 轴投影

$$F_z = -F_n \sin \alpha$$

$$F_{xy} = F_n \cos \alpha$$

$$F_x = -F_{xy} \sin \beta = -F_n \cos \alpha \sin \beta$$

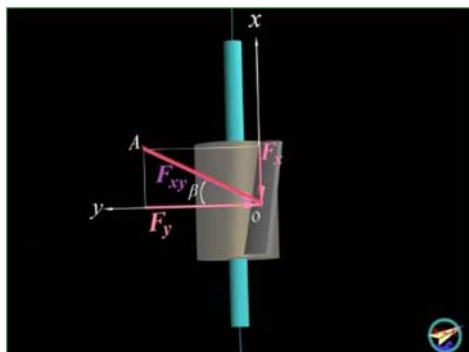
$$F_y = -F_{xy} \cos \beta = -F_n \cos \alpha \cos \beta$$

沿各轴的分力为

$$F_x = (-F_n \cos \alpha \sin \beta) i$$

$$F_y = (-F_n \cos \alpha \cos \beta) j$$

$$F_z = (-F_n \sin \alpha) k$$



南京大学
NANJING UNIVERSITY

第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

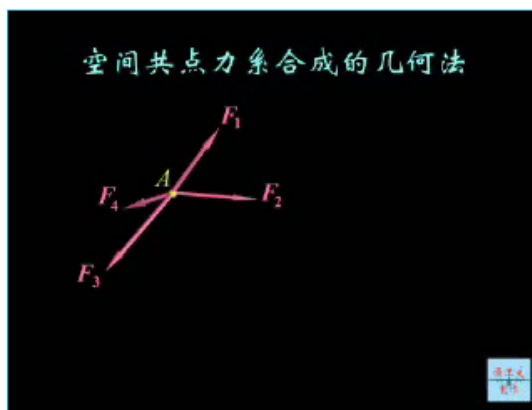
一、空间汇交力系合成的几何法

结论：空间汇交力系的合力等于力系中的各个力的矢量和。

或者说，合力是由这个力系的力多边形的闭合边来表示。

公式：

$$F_R = \sum F_i$$



第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

二、空间汇交力系平衡的几何条件

空间汇交力系平衡的充要的几何条件是这力系的多边形自行闭合，即力系中各力的矢量和等于零。

$$F_R = \sum F_i = 0$$

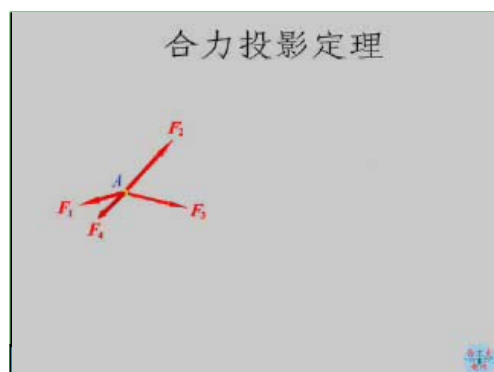


第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

三. 合力投影定理

汇交力系的合力在某一轴上的投影，等于力系中所有各力在同一轴上投影的代数和。



第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

四、空间汇交力系平衡的充要条件

力系中各力在三个坐标轴中每一轴上的投影之和分别等于零。

空间汇交力系的平衡方程

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

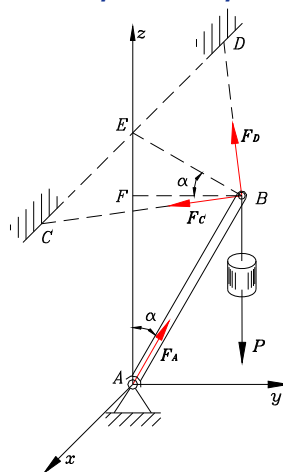
$$\sum F_z = 0$$



第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

例2-9 用轻质起重杆吊起重物如图所示， A 处为固定球铰链， B 端用绳子系在 C 、 D 两点，结构关于 Ayz 平面对称。已知 BF 和 y 轴相垂直， $CE=EB=ED$ ， $\alpha=30^\circ$ ， $P=10\text{kN}$ 。求绳子拉力和 A 处的约束反力。



第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

解：研究AB杆与重物

列平衡方程

受力分析，画受力图

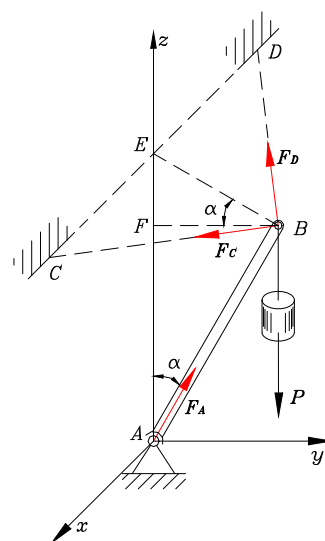
投影 \ 力	F_A	F_C	F_D	P
F_x	0	$F_C \sin 45^\circ$	$-F_D \sin 45^\circ$	0
F_y	$F_A \sin \alpha$	$-F_C \cos 45^\circ \cos \alpha$	$-F_D \cos 45^\circ \cos \alpha$	0
F_z	$F_A \cos \alpha$	$F_C \cos 45^\circ \sin \alpha$	$F_D \cos 45^\circ \sin \alpha$	$-P$

$$\sum F_x = 0, \quad F_C \sin 45^\circ - F_D \sin 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_A \sin \alpha - F_C \cos 45^\circ \cos \alpha - F_D \cos 45^\circ \cos \alpha = 0$$

$$\sum F_z = 0, \quad F_A \cos \alpha + F_C \cos 45^\circ \sin \alpha + F_D \cos 45^\circ \sin \alpha - P = 0$$

解得： $F_A = 8.66\text{kN}$, $F_C = F_D = 3.54\text{kN}$



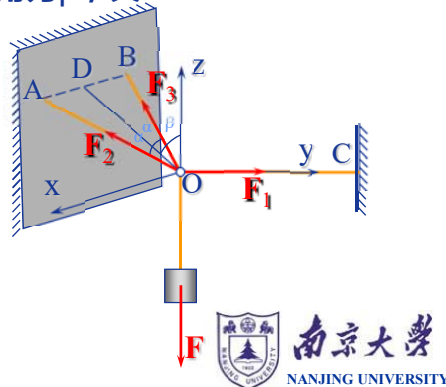
第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

例2-10 如图所示为空气动力天平上测定模型所受阻力用的一个悬挂节点O，其上作用有铅直载荷F。钢丝OA和OB所构成的平面垂直于铅直平面Oyz，并与该平面相交于OD，而钢丝OC则沿水平轴y。已知OD与轴z间的夹角为 β ，又 $\angle AOD = \angle BOD = \alpha$ ，试求各钢丝中的拉力。

解：

取O点为研究对象，受力分析如图所示，这些力构成了空间汇交力系。

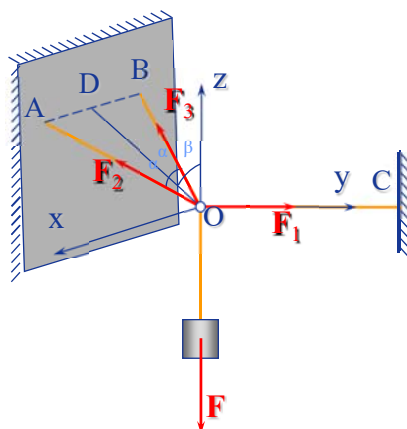


南京大学
NANJING UNIVERSITY

第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

力 F_2 和 F_3 的方向以 α 角和 β 角来表示， α 是这两力各自对坐标平面Oyz的倾角， β 是这两力在坐标平面Oyz上的投影对z轴的倾角。



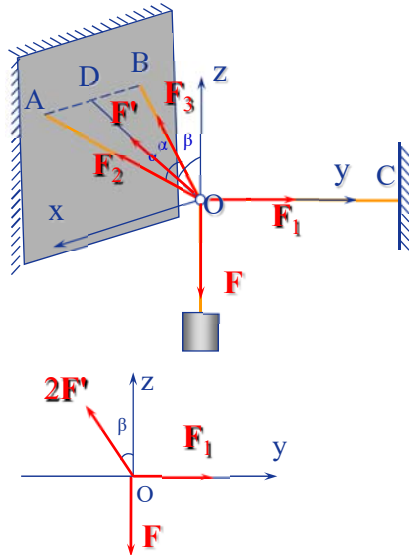
故求这两力在y轴和z轴上的投影时，须先将它们投影到Oyz平面上。



南京大学
NANJING UNIVERSITY

第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn



力 F_2 在平面 Oyz 上的投影为：

$$F' = F_2 \cos \alpha$$

并与 z 轴成 β 角。

故力 F_2 在 y 和 z 轴上的投影分别为：

$$-F_2 \cos \alpha \sin \beta \text{ 和 } F_2 \cos \alpha \cos \beta。$$

力 F_3 的投影可用同样方法求出。

力 F_2 与 x 轴之间的夹角为 $90^\circ - \alpha$ ，故它在该轴上的投影为：

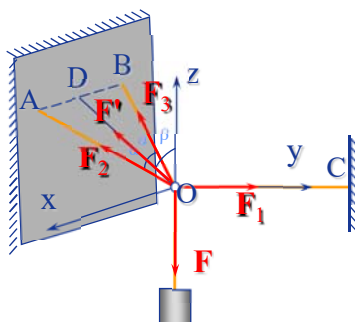
$$F_{2x} = F_2 \sin \alpha$$



南京大学
NANJING UNIVERSITY

第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn



列平衡方程

$$\sum F_x = 0, \quad F_2 \sin \alpha - F_3 \sin \alpha = 0$$

$$\sum F_y = 0,$$

$$F_1 - F_2 \cos \alpha \sin \beta - F_3 \cos \alpha \sin \beta = 0$$

$$\sum F_z = 0,$$

$$F_2 \cos \alpha \cos \beta + F_3 \cos \alpha \cos \beta - F = 0$$

联立求解可得

$$F_1 = F \tan \beta \quad F_2 = F_3 = \frac{F}{2 \cos \alpha \cos \beta}$$



南京大学
NANJING UNIVERSITY

第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

三、汇交力系的合力之矩定理

汇交力系的合力对点的矩等于该力系所有分力对同一点的矩的矢量和。

证：

设 r 为矩心到汇交点的矢径， R 为 F_1 、 F_2 、...、 F_n 的合力，即：

$R = F_1 + F_2 + \dots + F_n$ 可得：

$$\begin{aligned} M_O(F_R) &= r \times R = r \times (F_1 + F_2 + \dots + F_n) \\ &= r \times F_1 + r \times F_2 + \dots + r \times F_n \\ &= M_O(F_1) + M_O(F_2) + \dots + M_O(F_n) \end{aligned}$$

也就是：

$$\mathbf{M}_O(F_R) = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_i)$$



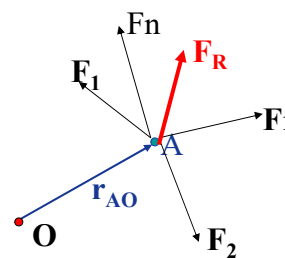
南京大学
NANJING UNIVERSITY

第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

$$\vec{F}_R = \sum \vec{F}_i$$

$$\begin{aligned} m_o(F_R) &= \mathbf{r}_{AO} \times \mathbf{F}_R \\ &= \mathbf{r}_{AO} \times (\sum \mathbf{F}_i) \\ &= \sum (\mathbf{r}_{AO} \times \mathbf{F}_i) \\ &= \sum m_o(F_i) \end{aligned}$$



空间汇交力系的合力之矩定理：

合力对任一点之矩的矢量等于各分力对同一点之矩的矢量和。



南京大学
NANJING UNIVERSITY

第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

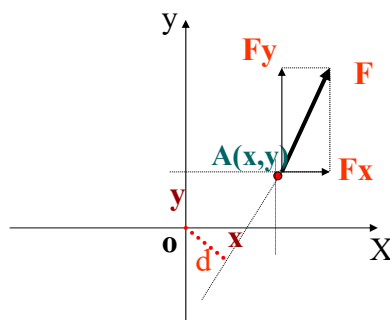
平面汇交力系的合力之矩定理：

合力对任一点之矩等于各分力对同一点之矩的代数和。

$$M_o(F_R) = \sum M_o(F_i)$$

举例：

$$\begin{aligned} M_o(F) &= \sum M_o(F_i) \\ &= M_o(F_y) + M_o(F_x) \\ &= xF_y - yF_x \end{aligned}$$



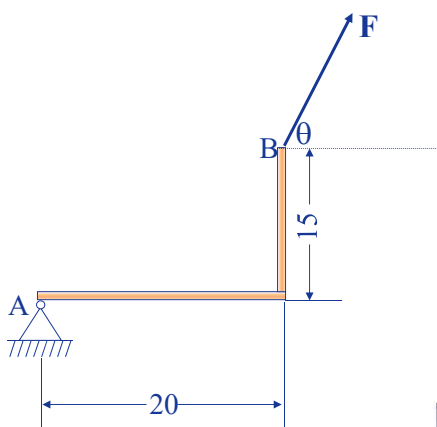
$$M_o(F) = \pm Fd$$



第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

例2-11：图示 $F=5\text{kN}$, $\sin\theta=0.8$ ，试求力 F 对 A 点的矩。



第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

解:

$$BC = \frac{15}{0.8} = 18.75$$

$$CD = 18.75 \times 0.6 = 11.25$$

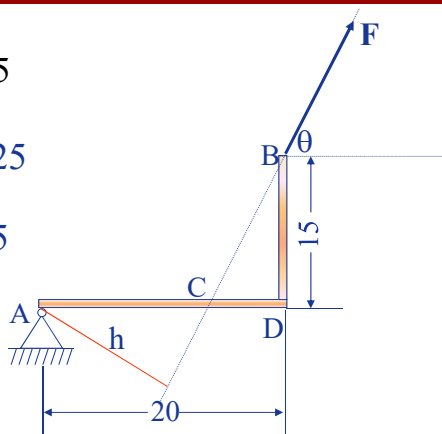
$$AC = 20 - 11.25 = 8.75$$

$$h = 8.75 \times 0.8$$

$$= 7$$

$$M_o(\mathbf{F}) = hF$$

$$= 7 \times 5 = 35$$



南京大学
NANJING UNIVERSITY

第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

$$F_x = F \cos \theta = 5 \times 0.6 = 3$$

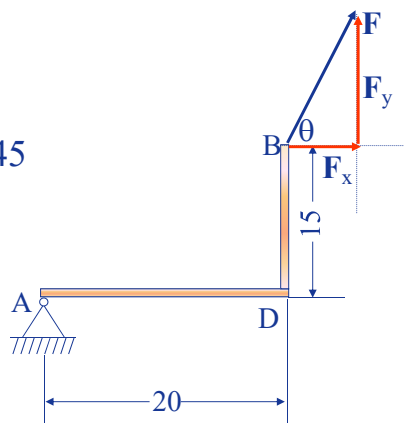
$$F_y = F \sin \theta = 5 \times 0.8 = 4$$

$$M_o(\mathbf{F}_x) = -BD \cdot F_x = -15 \times 3 = -45$$

$$M_o(\mathbf{F}_y) = AD \cdot F_y = 20 \times 4 = 80$$

$$M_o(\mathbf{F}) = M_o(\mathbf{F}_x) + M_o(\mathbf{F}_y)$$

$$= -45 + 80 = 35$$



南京大学
NANJING UNIVERSITY

第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

例2-12 三角形分布载荷作用在水平梁上，如图所示。最大载荷强度为 q_m ，梁长 l 。试求该力系的合力。

解：1.求合力大小

$$q' = \frac{x}{l} q_m$$

由合力投影定理

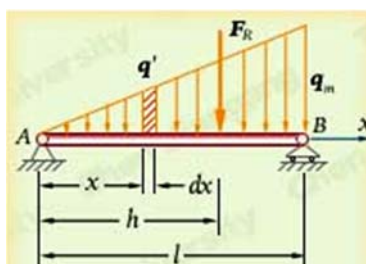
$$F_R = \int_0^l q' dx = \frac{1}{2} q_m l$$

2.求合力作用线位置

由合力矩定理

$$F_R h = \int_0^l q' x dx$$

$$h = \frac{2}{3} l$$



南京大学
NANJING UNIVERSITY

第二章 力系的等效和简化

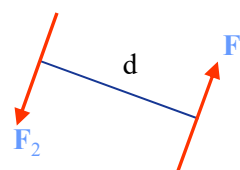
www.slope.com.cn

§2-4 平面力偶系的合成与平衡

1.力偶和力偶矩

力偶(couple) —— 大小相等的二反向平行力

- (1) 作用效果：引起物体的转动。
- (2) 力和力偶是静力学的二基本要素。



力偶特性一：力偶中的二个力，既不平衡，也不可能合成为一个力。

力偶特性二：力偶只能用力偶来代替（即只能和另一力偶等效），因而也只能与力偶平衡。

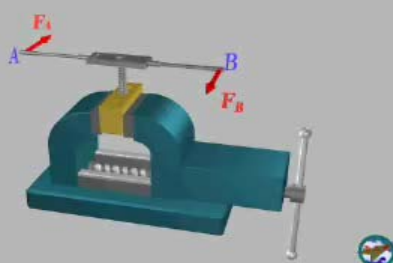


南京大学
NANJING UNIVERSITY

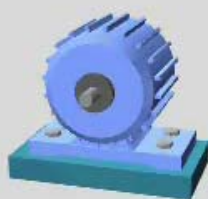
第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

钳工用丝锥攻螺纹



工程实例



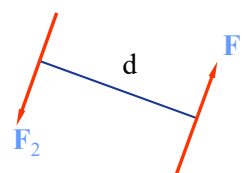
力偶实例

第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

力偶臂——力偶中两个力的作用线之间的距离。

力偶矩(Moment of a couple)——力偶中任何一个力的大小与力偶臂 d 的乘积，加上适当的正负号。



$$M = \pm F_1 \cdot d$$

力偶矩正负规定：若力偶有使物体逆时针旋转的趋势，力偶矩取正号；反之，取负号。简称：逆正顺负

第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

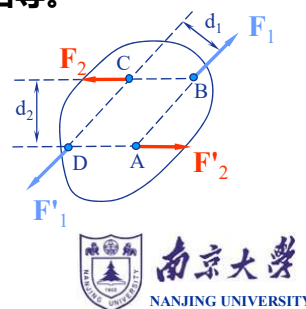
2. 平面内力偶的等效定理

作用在刚体内同一平面上的两个力偶相互等效的充要条件是二者的力偶矩代数值相等。

定理证明

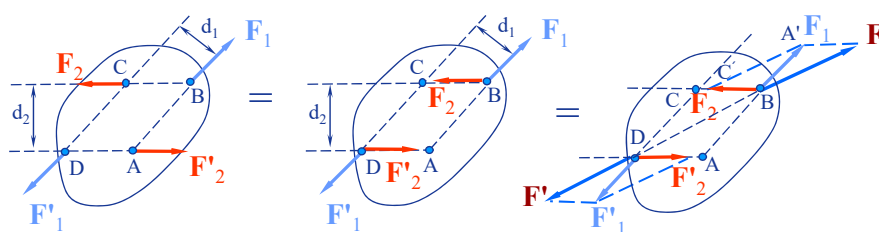
(1) 必要性证明 即二力偶等效 $\Rightarrow$ 力偶矩相等。

设在刚体的同一平面上作用着二力偶 (F_1, F_1') 、 (F_2, F_2') 。假设两力偶等效。



第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn



为了便于比较，将力 F_2 、 F_2' 分别沿着其作用线移到点B和D。

将 F_1 分解成两个力，使其中一个分力等于 F_2 ，而另一个力则是 F 。同样分解 F_1' 。

由于这两的力偶是等效的，力 F 和 F' 必须构成平衡力系，即这两个力等值、反向，并沿同一直线BD。



第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

计算这两个等效力偶的力偶矩。

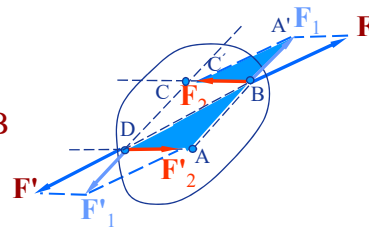
$$M(F_1, F'_1) = d_1 \cdot F_1 = (d_1 \cdot AB) \cdot F_1 / AB$$

$$M(F_2, F'_2) = d_2 \cdot F_2 = (d_2 \cdot DA) \cdot F_2 / DA$$

因为 $\triangle ABD \sim \triangle BA'C'$, 所以 $\frac{F_1}{AB} = \frac{F_2}{DA}$

又因为平行四边形ABCD面积 = $d_1 \cdot AB = d_2 \cdot DA$

则 $M(F_1, F'_1) = M(F_2, F'_2)$, 即二等效力偶的力偶矩相等。



第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

由上述证明可以看出：

力偶特性三：

力偶可以在其作用面内任意搬移。即力偶在作用面内的位置不是力偶效应的特征。

力偶特性四：

唯一决定平面内力偶效应的特征量是力偶矩的代数值。即保持力偶矩不变，可以改变其力或力臂的大小。

$$M = F \cdot d = F' \cdot d'$$



因此，以后可用力偶的转向箭头来代替力偶。



第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

(2) 充分条件证明

即二力偶矩相等 $\Rightarrow$ 二力偶等效。

假定两力偶的力偶矩相等，我们总可以适当地改变两力偶中任一力偶的力偶臂和力的大小（保持原力偶矩不变），使二力偶的力偶臂及力的大小相等，又二力偶转向相同，所以两力偶等效。



第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

● 力对点的矩与力偶矩的区别

相同处：力矩的量纲与力偶矩的相同。

牛顿·米 ($\text{N} \cdot \text{m}$)

不同处：力对点的矩可随矩心的位置改变而改变，但一个力偶的矩是常量。

联系：力偶中的两个力对任一点的之和是常量，等于力偶矩。

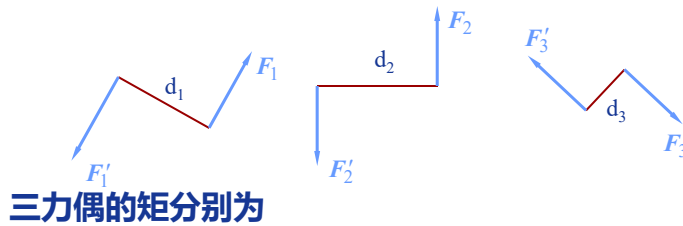


第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

3. 平面力偶系的合成

设刚体上作用着三力偶 (F_1, F_1') 、 (F_2, F_2') 、 (F_3, F_3') ，力偶臂分别为 d_1, d_2, d_3 ，转向如图，现求其合成结果。

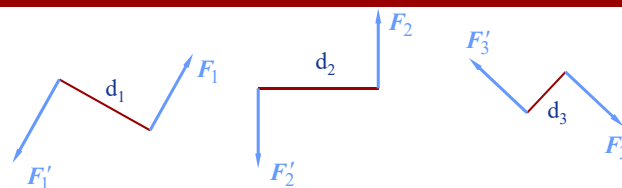


$$M_1 = F_1 d_1, \quad M_2 = F_2 d_2, \quad M_3 = -F_3 d_3$$



第二章 力系的等效和简化

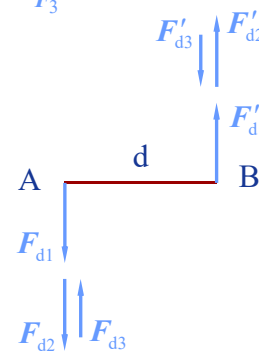
www.slope.com.cn



$$M_1 = F_1 d_1, \quad M_2 = F_2 d_2, \quad M_3 = -F_3 d_3$$

经等效变换后，各力偶中力的大小分别为

$$F_{d1} = \frac{M_1}{d}, \quad F_{d2} = \frac{M_2}{d}, \quad F_{d3} = \frac{|M_3|}{d}$$



第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

假定 $F_{d1} + F_{d2} > F_{d3}$, 其合力

$$F = F_{d1} + F_{d2} - F_{d3}, \quad F' = F'_{d1} + F'_{d2} - F'_{d3}$$

$$F = -F'$$

合力偶的力偶矩为

$$M = Fd$$

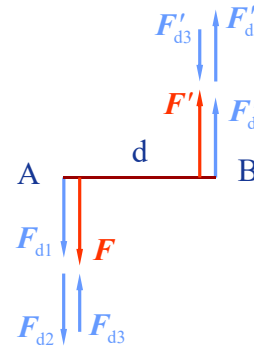
$$= (F_{d1} + F_{d2} - F_{d3})d$$

$$= F_{d1}d + F_{d2}d + (-F_{d3})d$$

$$= M_1 + M_2 + M_3$$

推广到由任意多个力偶组成的平面力偶系,合力偶矩为

$$M = M_1 + M_2 + \cdots + M_n = \sum M_i$$



南京大学
NANJING UNIVERSITY

第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

$$M = M_1 + M_2 + \cdots + M_n = \sum M_i$$

结论：平面力偶系合成的结果是一个力偶，它的矩等于原来各力偶的矩的代数和。

4. 平面力偶系平衡条件

在上面讨论中，若 $F_{d1} + F_{d2} = F_{d3}$ ，则其合力 $F=0$ ，从而有

$$M_1 + M_2 + M_3 = 0$$

推广到由任意个力偶组成的平面力偶系,有

$$M = M_1 + M_2 + \cdots + M_n = \sum M_i = 0$$

结论：作用在刚体上的平面力偶系的平衡条件是力偶系中各力偶的矩之代数和等于零。



南京大学
NANJING UNIVERSITY

第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

例2-13 一简支梁 $AB=d$ ，作用一力偶 M ，求二支座约束力。

解： 梁上作用力偶 M 外，还有约束力 F_A ， F_B 。

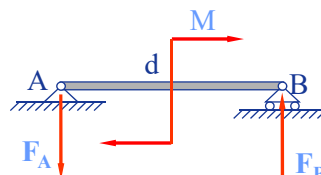
因为力偶只能与力偶平衡，所以

$$F_A = F_B。$$

由 $\sum M_i = 0$

即 $M - F_A d = 0$

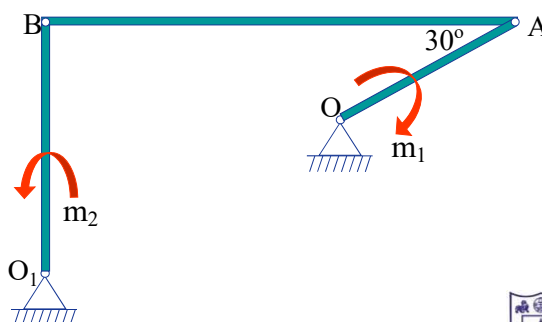
$$F_A = F_B = M/d$$



第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

例2-14. 图示铰链四连杆机构 $OABO_1$ 处于平衡位置.已知 $OA=40\text{cm}$, $O_1B=60\text{cm}$, $m_1=1\text{N}\cdot\text{m}$,各杆自重不计.试求力偶矩 m_2 的大小及杆 AB 所受的力.



第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

解: AB为二力杆

$$S_A = S_B = S$$

取OA杆为

研究对象.

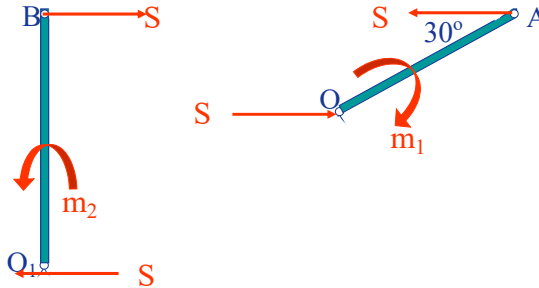
$$\sum m_i = 0$$

$$0.4 \sin 30^\circ S - m_1 = 0 \quad (1)$$

取O₁B杆为研究对象. $\sum m_i = 0$

$$m_2 - 0.6 S = 0 \quad (2)$$

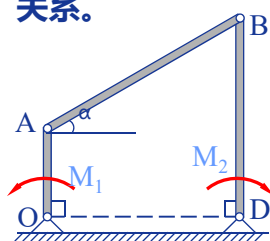
$$\text{联立(1)(2)两式得: } S = 5 \quad m_2 = 3$$



第二章 力系的等效和简化

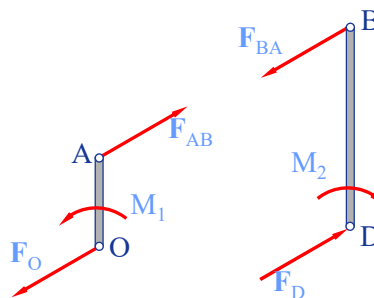
www.slope.com.cn

例2-15 如图所示的铰接四连杆机构OABD，在杆OA和BD上分别作用着矩为 M_1 和 M_2 的力偶，而使机构在图示位置处于平衡。已知 $OA = r$ ， $DB = 2r$ ， $\alpha = 30^\circ$ ，不计杆重，试求 M_1 和 M_2 间的关系。



解: 杆AB为二力杆。

由于力偶只能与力偶平衡，则AO杆与BD杆的受力如图所示。



第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

分别写出杆AO和BD的平衡方程：

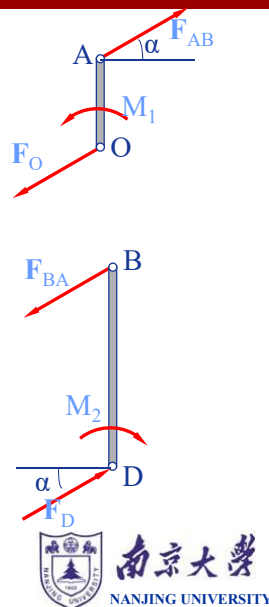
由 $\sum M_i = 0$

得 $M_1 - r \cdot F_{AB} \cos\alpha = 0$

$-M_2 + 2r \cdot F_{BA} \cos\alpha = 0$

因为 $F_{AB} = F_{BA}$

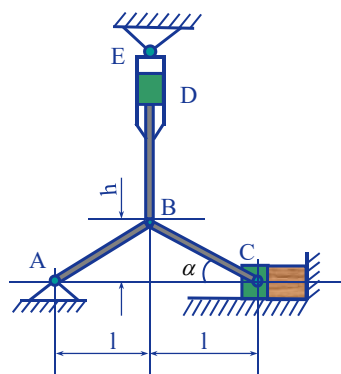
则得 $M_2 = 2M_1$



南京大学
NANJING UNIVERSITY

第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn



例2-16 如图所示压榨机中，杆AB和BC的长度相等，自重忽略不计。A、B、C处为铰链连接。已知活塞D上受到油缸内的总压力为 $F=3\text{ kN}$ ， $h=200\text{ mm}$ ， $l=1500\text{ mm}$ 。试求压块C对工件与地面的压力以及杆AB所受的力。



南京大学
NANJING UNIVERSITY

第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

解：1. 选活塞杆为研究对象，受力分析如图。

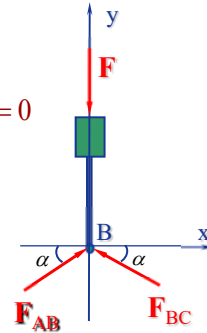
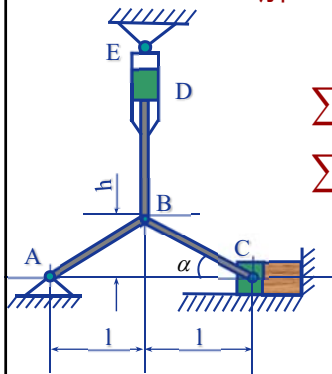
列平衡方程

$$\sum F_x = 0, \quad F_{BA} \cos \alpha - F_{BC} \cos \alpha = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{BA} \sin \alpha + F_{BC} \sin \alpha - F = 0$$

解方程得杆AB, BC所受的力

$$F_{BA} = F_{BC} = \frac{F}{2 \sin \alpha} = 11.35 \text{ kN}$$



南京大学
NANJING UNIVERSITY

第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

2. 选压块C为研究对象，受力分析如图。

列平衡方程

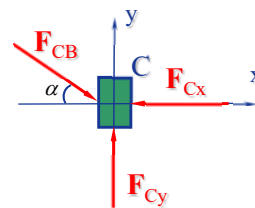
$$\sum F_x = 0, \quad -F_{Cx} + F_{CB} \cos \alpha = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad -F_{CB} \sin \alpha + F_{Cy} = 0$$

解方程得

$$F_{Cx} = \frac{F \cos \alpha}{2 \sin \alpha} = \frac{F}{2} \cot \alpha = \frac{Fl}{2h} = 11.25 \text{ kN}$$

$$F_{Cy} = F_{CB} \sin \alpha = \frac{F}{2} = 1.5 \text{ kN}$$



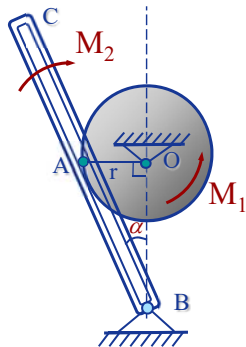
故压块对工件与地面的压力分别与其大小相等。



南京大学
NANJING UNIVERSITY

第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn



例2-17 如图所示机构的自重不计。圆轮上的销子A放在摇杆BC上的光滑导槽内。圆轮上作用一力偶，其力偶矩为 $M_1 = 2 \text{ kN} \cdot \text{m}$ ， $OA = r = 0.5 \text{ m}$ 。图示位置时OA与OB垂直，角 $\alpha = 30^\circ$ ，且系统平衡。求作用于摇杆BC上的力偶的矩 M_2 及铰链O，B处的约束力。



第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

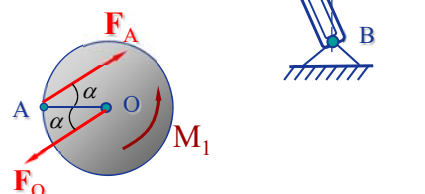
解： 先取圆轮为研究对象。

因为力偶只能与力偶平衡，所以，力 F_A 与 F_O 构成一力偶，故 $F_A = -F_O$ 。

$$\sum M = 0, \quad -M_1 + F_A r \sin \alpha = 0$$

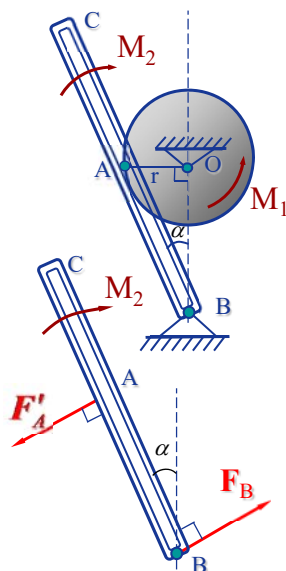
解得

$$F_A = \frac{M_1}{r \sin 30^\circ}$$



第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn



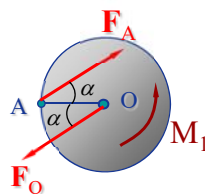
再取摇杆BC为研究对象。

$$\sum M = 0, \quad -M_2 + F'_A \frac{r}{\sin \alpha} = 0$$

其中 $F'_A = F_A$

解得 $M_2 = 4M_1 = 8 \text{ kN} \cdot \text{m}$

$$F_O = F_B = F_A = \frac{M_1}{r \sin 30^\circ} = 8 \text{ kN}$$



第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

本章小结

1、汇交力系的合力

(1) 几何法求合力 $F_R = F_1 + F_2 + \dots + F_N = \sum F_i$

(2) 解析法求合力

$$F_R = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2 + (\sum F_z)^2}$$

方向余弦 $\cos \alpha = \frac{F_x}{F};$

$$\cos \beta = \frac{F_y}{F};$$

$$\cos \gamma = \frac{F_z}{F}$$



第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

2、汇交力系的合力

汇交力系平衡的充要条件：

$$F_R = F_1 + F_2 + \dots + F_N = 0 \quad \text{即} \quad \Sigma F_i = 0$$

汇交力系平衡的几何条件：

力多边形自行封闭。

汇交力系平衡的解析条件：

$$\Sigma F_x = 0; \Sigma F_y = 0; \Sigma F_z = 0$$

3、合力矩定理

汇交力系的合力对点的矩等于该力系所有分力对同一点的矩的矢量和。

$$M_O(F_R) = M_O(F_1) + M_O(F_2) + \dots + M_O(F_n)$$



南京大学
NANJING UNIVERSITY

第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

4、力偶

力偶 —— 由两个等值、反向且不共线的平行力系组成。记作 (F, F')

力偶对物体的作用效应决定于力偶矩的大小、方位和转向。

(1) 力偶等效定理：作用于刚体上的两力偶，若它们的力偶矩矢相等，则此二力偶等效

(2) 力偶不能与一个力相平衡

(3) 力偶没有合力



南京大学
NANJING UNIVERSITY

第二章 力系的等效和简化

www.slope.com.cn

5、力偶的合成与平衡

任意个力偶可以合成为一个合力偶，这个合力偶矩矢等于各分力偶矩矢的矢量和。

$$M = M_1 + M_2 + \dots + M_n = \sum M_i$$

力偶系平衡的充分必要条件是力偶系的合力偶矩等于零，即所有力偶矩矢的矢量和等于零。

$$\sum_{i=1}^n M_i = 0$$




南京大學



Thank You !

2-3、2-5、2-7 (10月9日提交)

www.slope.com.cn