Engineering Mechanics 工程力学

朱鸿鹄
南京大学地球科学与工程学院

第四章 空间力系

南京长江大桥

- 南京长江大桥横跨下关和浦口之间的长江江面，是一座铁路、公路两用的**特大双层钢桁梁桥**。大桥上层为路宽15米、全长4588米的四车道公路桥；下层为宽14米、全长6772米的双轨复线铁路桥，使中国交通大动脉京沪铁路得以贯通。
- 大桥由正桥和引桥两部分组成，正桥**9墩10跨**，长**1576米**，最大跨度**160米**。大桥通航净空宽度120米，桥下通航净空高度为最高通航水位以上**24米（长江沿岸都用这个值）**，可通过5000吨级海轮。

第四章 空间力系

- 南京长江大桥建于1960-1968年，是继武汉长江大桥（1955-1957）和重庆白沙沱长江大桥（1958-1959）之后第三座跨越长江干流的大桥，是第一座完全由中国设计建造并基本采用国产材料的特大型桥梁，因而在中国桥梁史上具有重要意义。该桥曾以“最长的公铁两用桥”被记载入《吉尼斯世界记录大全》。
- 时为南京军区司令员的许世友，曾调来约百辆坦克同时开过桥面，以检验大桥质量。

南京大學 NANJING UNIVERSITY

第四章 空间力系

www.slope.com.cn

桥梁建设过程的照片

NANJING UNIVERSITY

第四

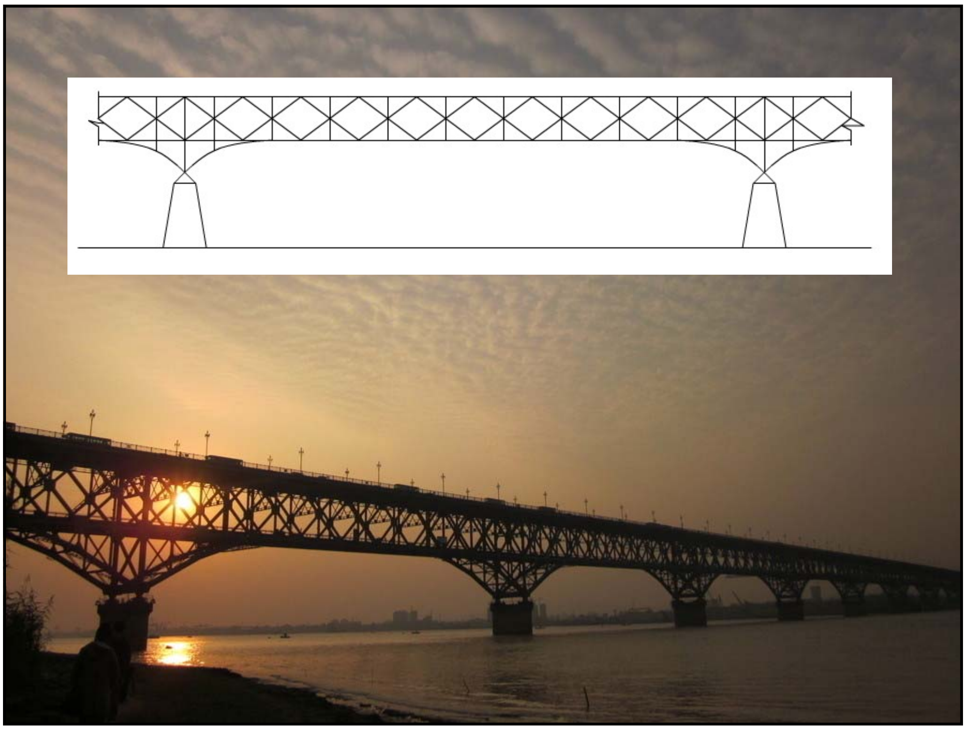
www.slope.com.cn

- 正桥两端为复式桥
，小堡顶部为“工

第四章 空间力系

www.slope.com.cn

- 2011年南京长江大桥日均通过机动车8万辆。
- 由于长期超负荷使用，南京长江大桥进行了多次修补，内容包括了桥墩加固、桥面沥青铺设、修补坑洞等，并更换了1号和4号桥墩的支座。



第四章 空间力系

www.slope.com.cn

- 技术顾问委员会主任：李国豪
- 总工程师：梅旸春（1962年逝世于大桥工地）
- 设计总工程师：胡兢铭
- 钢梁总设计师：方秦汉

- 16岁进入同济大学学习并留校任教，1938年开始留学德国8年，获得第二个博士学位。50-60年代，先后参与武汉长江大桥、南京长江大桥的设计。文革期间被迫害。1977年开始出任同济大学校长。李国豪曾被国际桥梁与结构工程协会推选为世界十大著名结构工程专家之一。2005年去世。

NANJING UNIVERSITY

第四章 空间力系

- 1966年李国豪被隔离审查。他获知南京长江大桥行将通车，他想起了武汉长江大桥的通车典礼中曾出现桥梁晃动的现象，而原因却始终没有找到。
- 为了解决这个难题，他凭着卓越超群的理论基础和创造思维，借助报纸的边角和夹缝，演算推导，在狱中完成了大桥振动的初步理论。此后又托人找到试验模型材料，用极原始的办法偷偷制作出桁梁桥模型。
- 之后在校内监督劳动期间，他把自己的家变作了研究室，做了桥梁模型和扭转试验，并继续完善理论分析和计算。1973年，李国豪完成专著《桁梁扭转理论——桁梁桥的扭转、稳定和振动》。武汉大桥的振动问题和南京大桥的稳定难题迎刃而解，中国大桥设计多年来的心病被医好了。

南京大學 NANJING UNIVERSITY

第四章 空间力系

南京大學 NANJING UNIVERSITY

第四章 空间力系

教学基本要求

•熟练计算力在坐标轴上的投影。了解空间力对点的矩的概念，熟练计算力对轴的矩。

•在平面力偶的基础上，掌握空间力偶矩的概念，空间力偶的性质，力偶系的合成与平衡计算。

•了解空间任意力系向一点简化和主矢主矩的概念，空间任意力系简化的最后结果。

•熟练运用空间任意力系的平衡方程求解空间任意力系的简单平衡问题。

•掌握重心的计算与确定方法。

第四章 空间力系

§ 4–1 空间汇交力系

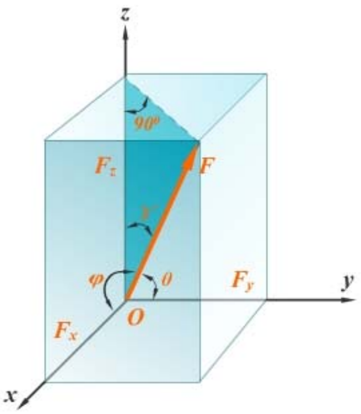
1、力在直角坐标轴上的投影

直接投影法

$$F_x = F\cos\varphi$$

$$F_y = F\cos\theta$$

$$F_z = F\cos\gamma$$



第四章 空间力系

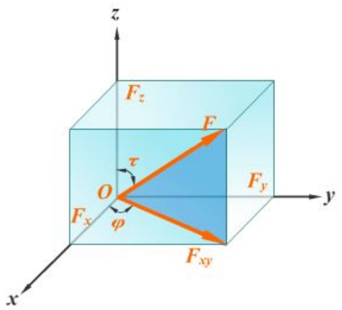
间接（二次）投影法

$$F_{xy} = F\sin\tau$$

$$F_x = F\sin\tau\cos\varphi$$

$$F_y = F\sin\tau\sin\varphi$$

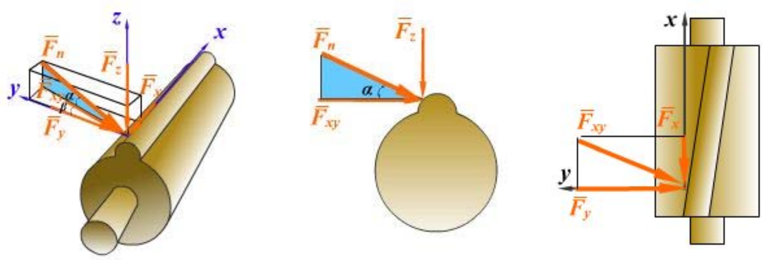
$$F_z = F\cos\tau$$



第四章 空间力系

例4-1 已知：$\vec{F}_n, \beta, \alpha$

求：力 $\vec{F}_n$ 在三个坐标轴上的投影.



解： $F_z = -F_n\sin\alpha \qquad F_{xy} = F_n\cos\alpha$

$$F_x = -F_{xy}\sin\beta = -F_n\cos\alpha\sin\beta$$

$$F_y = -F_{xy}\cos\beta = -F_n\cos\alpha\cos\beta$$

第四章 空间力系

2、空间汇交力系的合力与平衡条件

空间汇交力系的合力 $\vec{F}_R = \sum \vec{F}_i$

合矢量（力）投影定理

$$F_{Rx} = \sum F_{ix} = \sum F_x \quad F_{Ry} = \sum F_{iy} = \sum F_y \quad F_{Rz} = \sum F_{iz} = \sum F_z$$

合力的大小 $F_R = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2 + (\sum F_z)^2}$

方向余弦

$$\cos(\vec{F}_R, \vec{i}) = \frac{\sum F_x}{F_R} \quad \cos(\vec{F}_R, \vec{j}) = \frac{\sum F_y}{F_R} \quad \cos(\vec{F}_R, \vec{k}) = \frac{\sum F_z}{F_R}$$

第四章 空间力系

空间汇交力系的合力等于各分力的矢量和，合力的作用线通过汇交点.

空间汇交力系平衡的充分必要条件是：

该力系的合力等于零，即 $\vec{F}_R = 0$

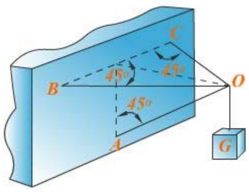
$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad \sum F_z = 0$$

称为空间汇交力系的平衡方程.

空间汇交力系平衡的**充要条件**：该力系中所有各力在三个坐标轴上的投影的代数和分别为零.

第四章 空间力系

例4-2 已知：P=1000N ,各杆重不计.



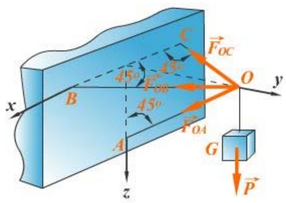
求：三根杆所受力.

解：各杆均为二力杆，取球铰O，画受力图。

$$\sum F_x = 0 \qquad F_{OB}\sin 45^\circ - F_{OC}\sin 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0 \qquad -F_{OB}\cos 45^\circ - F_{OC}\cos 45^\circ - F_{OA}\cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_z = 0 \qquad F_{OA}\sin 45^\circ - P = 0$$



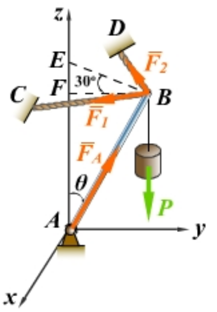
$$F_{OA} = -1414\mathrm{N} \quad F_{OB} = F_{OC} = 707\mathrm{N}$$ （拉）

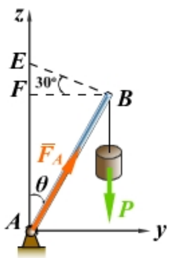
第四章 空间力系

例4-3 已知：物重P=10kN，CE=EB=DE；$\theta = 30^0$

求：杆受力及绳拉力

解：画受力图，列平衡方程





$$\sum F_x = 0$$

$$F_1\sin 45^\circ - F_2\sin 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$F_A\sin 30^\circ - F_1\cos 45^\circ\cos 30^\circ - F_2\cos 45^\circ\cos 30^\circ = 0$$

$$\sum F_z = 0$$

$$F_1\cos 45^\circ\sin 30^\circ + F_2\cos 45^\circ\sin 30^\circ + F_A\cos 30^\circ - P = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_1 = F_2 = 3.54\mathrm{kN} \qquad F_A = 8.66\mathrm{kN}$$

南京大学 NANJING UNIVERSITY

第四章 空间力系

§4–2 力对点的矩和力对轴的矩

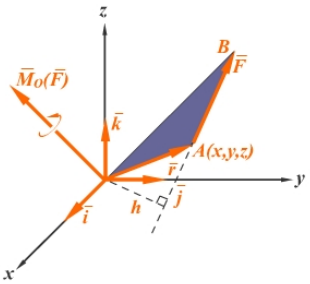
1、力对点的矩以矢量表示 ——力矩矢

三要素：

（1）大小:力F 与力臂的乘积

（2）方向:转动方向

（3）作用面：力矩作用面.



$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$$

第四章 空间力系

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \qquad \vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = (\vec{r} \times \vec{F}) = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \times (F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k})$$

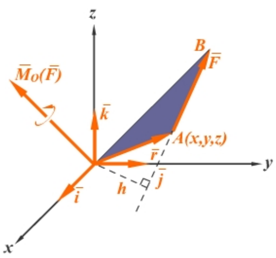
$$= (yF_z - zF_y)\vec{i} + (zF_x - xF_z)\vec{j} + (xF_y - yF_x)\vec{k}$$

力对点O的矩在三个坐标轴上的投影为

$$\left[\vec{M}_O(\vec{F})\right]_x = yF_z - zF_y$$

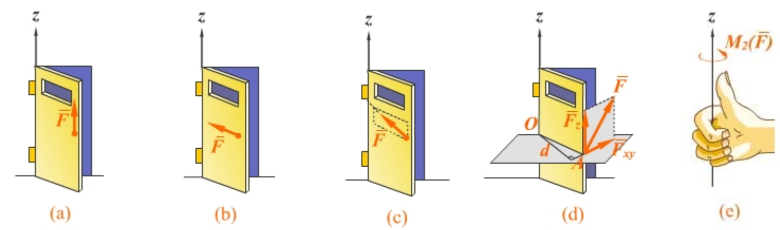
$$\left[\vec{M}_O(\vec{F})\right]_y = zF_x - xF_z$$

$$\left[\vec{M}_O(\vec{F})\right]_z = xF_y - yF_x$$



第四章 空间力系

2.力对轴的矩



$$M_z(\vec{F})=M_O(\vec{F}_{xy})=\pm F_{xy}\cdot h$$

力与轴相交或与轴平行（力与轴在同一平面内），力对该轴的矩为零.

第四章 空间力系

3、力对点的矩与力对过该点的轴的矩的关系

$$M_x(\vec{F})=M_x(\vec{F}_x)+M_x(\vec{F}_y)+M_x(\vec{F}_z)=F_z\cdot y-F_y\cdot z$$

$$M_y(\vec{F})=M_y(\vec{F}_x)+M_y(\vec{F}_y)+M_y(\vec{F}_z)=F_x\cdot z-F_z\cdot x$$

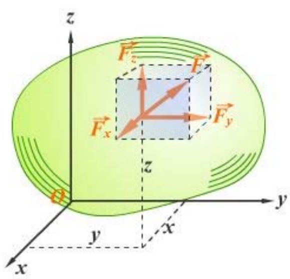
$$M_z(\vec{F})=F_y\cdot x-F_x\cdot y$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\vec{M}_O(\vec{F})\right]_x=yF_z-zF_y=M_x(\vec{F})$$

$$\left[\vec{M}_O(\vec{F})\right]_y=zF_x-xF_z=M_y(\vec{F})$$

$$\left[\vec{M}_O(\vec{F})\right]_z=xF_y-yF_x=M_z(\vec{F})$$



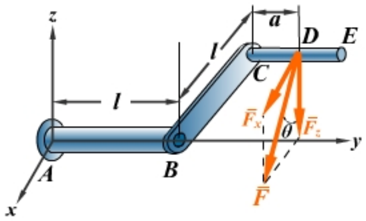
第四章 空间力系

例4-4

已知： F, l, a, θ

求： $M_x(\vec{F}), M_y(\vec{F}), M_z(\vec{F})$

解：把力 $\vec{F}$ **分解如图**



$$M_x(\vec{F}) = -F(l+a)\cos\theta$$

$$M_y(\vec{F}) = -Fl\cos\theta$$

$$M_z(F) = -F(l+a)\sin\theta$$

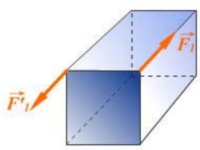
南京大学 NANJING UNIVERSITY

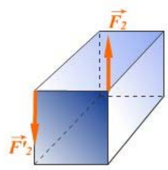
第四章 空间力系

§4–3　空间力偶

1、力偶矩以矢量表示－力偶矩矢

$$F_1 = F_2 = F_1' = F_2'$$



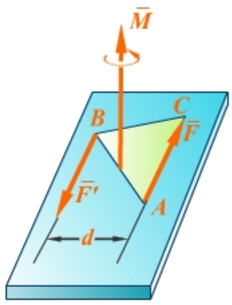


空间力偶的三要素

（1）大小：力与力偶臂的乘积；
（2）方向：转动方向；
（3）作用面：力偶作用面。

南京大学 NANJING UNIVERSITY

第四章 空间力系



$$\vec{M} = \vec{r}_{BA} \times \vec{F}$$

第四章 空间力系

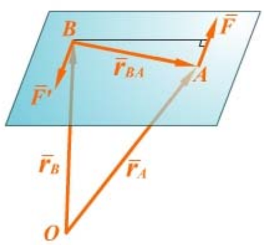
www.slope.com.cn

2、力偶的性质

（1）力偶中两力在任意坐标轴上投影的代数和为零．

（2）力偶对任意点取矩都等于力偶矩，不因矩心的改变而改变。

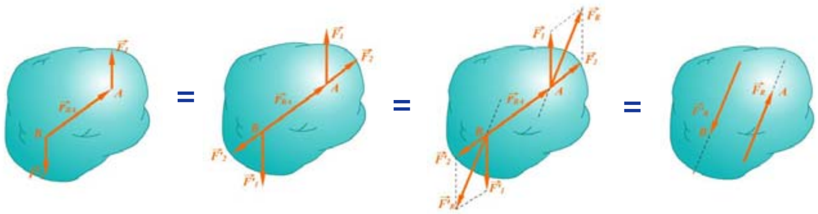
$$\vec{M}_O(\vec{F},\vec{F}') = \vec{M}_O(\vec{F}) + \vec{M}_O(\vec{F}')$$
$$= \vec{r}_A \times \vec{F} + \vec{r}_B \times \vec{F}'$$
$$\vec{F}' = -\vec{F}$$
$$\Downarrow$$
$$\vec{M}_O(\vec{F},\vec{F}') = (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \times \vec{F} = \vec{M}$$



南京大学
NANJING UNIVERSITY

第四章 空间力系

（3）只要保持力偶矩不变，力偶可在其作用面内任意移转，且可以同时改变力偶中力的大小与力偶臂的长短，对刚体的作用效果不变.

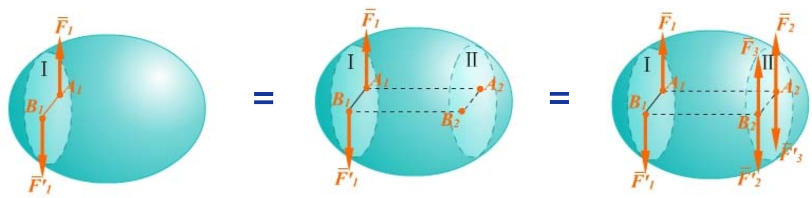


$$\vec{M}(\vec{F}_R,\vec{F}_R') = \vec{r}_{BA}\times\vec{F}_R = \vec{r}_{BA}\times(\vec{F}_1+\vec{F}_2)$$
$$= \vec{r}_{BA}\times\vec{F}_1 + \vec{r}_{BA}\times\vec{F}_2$$
$$= \vec{r}_{BA}\times\vec{F}_1 = \vec{M}(\vec{F}_1,\vec{F}_1')$$

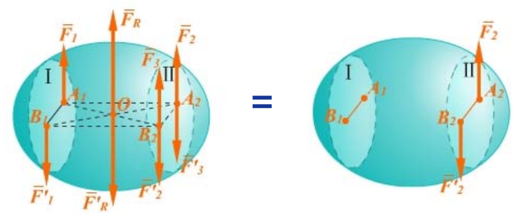
南京大学 NANJING UNIVERSITY

第四章 空间力系

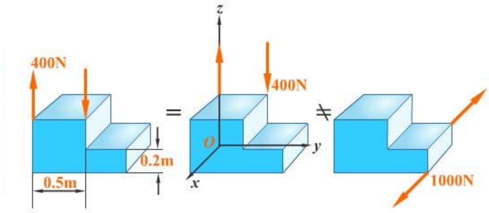
(4)只要保持力偶矩不变，力偶可从其所在平面移至另一与此平面平行的任一平面，对刚体的作用效果不变.

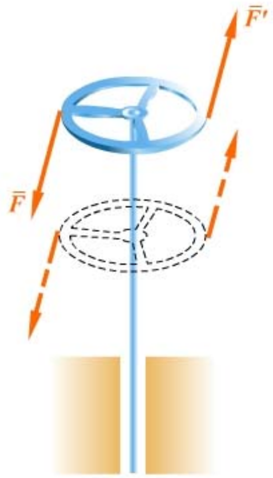


$$F_1 = F_1' = F_2$$
$$= F_2' = F_3 = F_3'$$



第四章 空间力系





定位矢量　滑移矢量　自由矢量

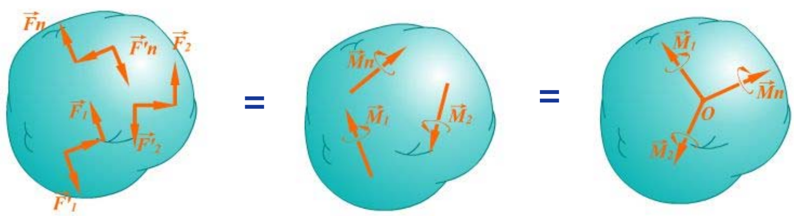
力偶矩矢是自由矢量

力偶矩相等的力偶等效

(5)力偶没有合力，力偶只能由力偶来平衡

第四章 空间力系

3．力偶系的合成与平衡条件



$$\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1, \vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2, ..., \vec{M}_n = \vec{r}_n \times \vec{F}_n$$

$$\Rightarrow \quad \vec{M} = \sum \vec{M}_i$$

$\vec{M}$ 为合力偶矩矢，等于各分力偶矩矢的矢量和.

第四章 空间力系

$$M_x=\sum M_x\,,M_y=\sum M_y\,,M_z=\sum M_z$$

合力偶矩矢的大小和方向余弦

$$M=\sqrt{(\sum M_x)^2+(\sum M_y)^2+(\sum M_z)^2}$$

$$\cos\theta=\frac{\sum M_x}{M}\qquad\cos\beta=\frac{\sum M_y}{M}\qquad\cos\gamma=\frac{\sum M_z}{M}$$

空间力偶系平衡的充分必要条件是 :合力偶矩矢等于零，即

$$\vec{M}=0$$

$$\Rightarrow\quad\sum M_x=0\quad\sum M_y=0\quad\sum M_z=0$$

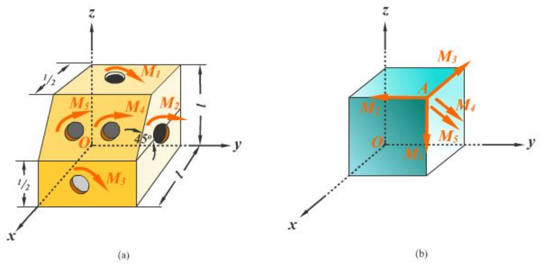
称为空间力偶系的平衡方程.

第四章 空间力系

例4-5 已知：在工件四个面上同时钻5个孔，每个孔所受切削力偶矩均为80N·m.

求：工件所受合力偶矩在x,y,z轴上的投影

解：把力偶用力偶矩矢表示，平行移到点A .



$$M_x=\sum M_{ix}=-M_3-M_4\cos45^\circ-M_5\cos45^\circ=-193.1\,\mathbf{N}\cdot\mathbf{m}$$

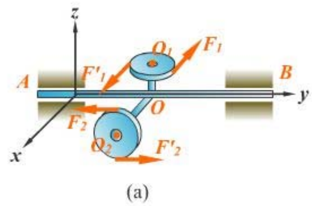
$$M_y=\sum M_{iy}=-M_2=-80\,\mathbf{N}\cdot\mathbf{m}$$

$$M_z=\sum M_{iz}=-M_1-M_4\cos45^\circ-M_5\cos45^\circ=-193.1\,\mathbf{N}\cdot\mathbf{m}$$

第四章 空间力系

例4-6已知：两圆盘半径均为200mm，AB =800mm，圆盘面O_1垂直于z轴，圆盘面O_2垂直于x轴，两盘面上作用有力偶，F_1=3N， F_2=5N，构件自重不计.

求:轴承A,B处的约束力.

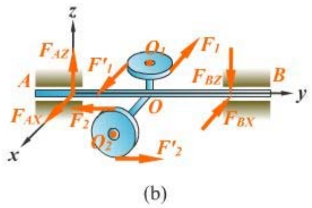


解：取整体，受力图如图所示.

$$\sum M_x = 0 \quad F_2 \cdot 400 - F_{Az} \cdot 800 = 0$$

$$\sum M_z = 0 \quad F_1 \cdot 400 + F_{Ax} \cdot 800 = 0$$

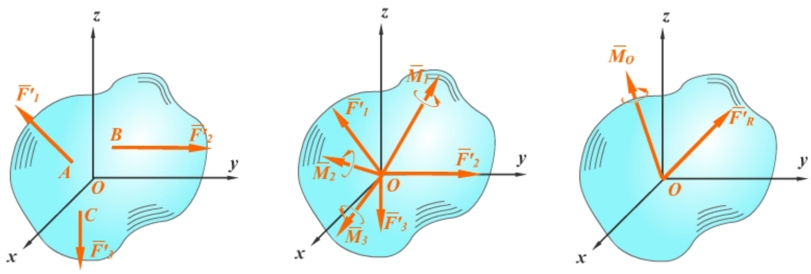
$$F_{Ax} = F_{Bx} = -1.5\text{N} \qquad F_{Az} = F_{Bz} = 2.5\text{N}$$



第四章 空间力系

§4–4 空间任意力系向一点的简化•主矢和主矩

1． 空间任意力系向一点的简化



$$\vec{F}_i' = \vec{F}_i \qquad \vec{M}_i = \vec{M}_O(\vec{F}_i)$$

空间汇交与空间力偶系等效代替一空间任意力系.

第四章 空间力系

空间汇交力系的合力

$$\vec{F}_R' = \sum \vec{F}_i = \sum F_x \vec{i} + \sum F_y \vec{j} + \sum F_z \vec{k}$$ ⟹ 主矢

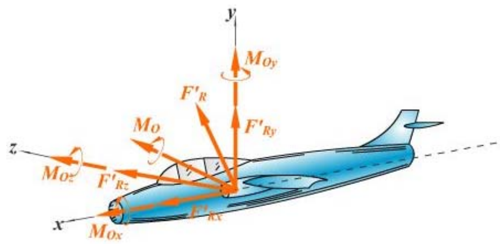
空间力偶系的合力偶矩

$$\vec{M}_O = \sum \vec{M}_i = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_i)$$ ⟹ 主矩

由力对点的矩与力对轴的矩的关系，有

$$\vec{M}_O = \sum M_x(\vec{F})\vec{i} + \sum M_y(\vec{F})\vec{j} + \sum M_z(\vec{F})\vec{k}$$

第四章 空间力系



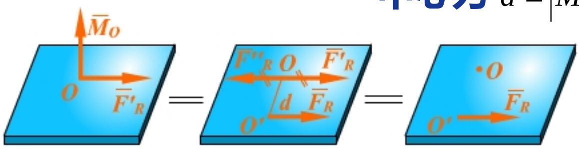
$\vec{F}_{Rx}'$	—有效推进力	飞机向前飞行
$\vec{F}_{Ry}'$	—有效升力	飞机上升
$\vec{F}_{Rz}'$	—侧向力	飞机侧移
$\vec{M}_{Ox}$	—滚转力矩	飞机绕x轴滚转
$\vec{M}_{Oy}$	—偏航力矩	飞机转弯
$\vec{M}_{Oz}$	—俯仰力矩	飞机仰头

第四章 空间力系

2．空间任意力系的简化结果分析（最后结果）

（1）简化为合力 $\vec{F}_R' \neq 0, \vec{M}_O = 0$ ➡ **过简化中心合力**

$\vec{F}_R' \neq 0, \vec{M}_O \neq 0, \vec{F}_R' \perp \vec{M}_O$ ➡ **合力.合力作用线距简化中心为** $d = |\vec{M}_O| / F_R'$



(a) (b) (c)

$$\vec{M}_O = \vec{d} \times \vec{F}_R = \vec{M}_O(\vec{F}_R) = \sum \vec{M}_O(\vec{F})$$

合力矩定理：合力对某点(轴）之矩等于各分力对同一点（轴）之矩的矢量和.

南京大学 NANJING UNIVERSITY

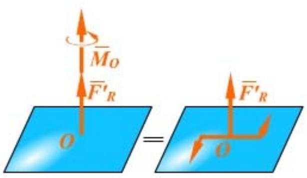
第四章 空间力系

（2）简化为合力偶

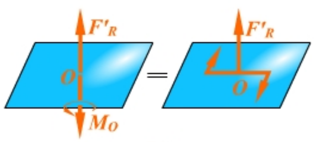
$\vec{F}_R' = 0, \vec{M}_O \neq 0$ ➡ **一个合力偶，此时与简化中心无关。**

（3）简化为力螺旋

$\vec{F}_R' \neq 0, \vec{M}_O \neq 0, \vec{F}_R' \,//\, \vec{M}_O$ ➡ **中心轴过简化中心的力螺旋**



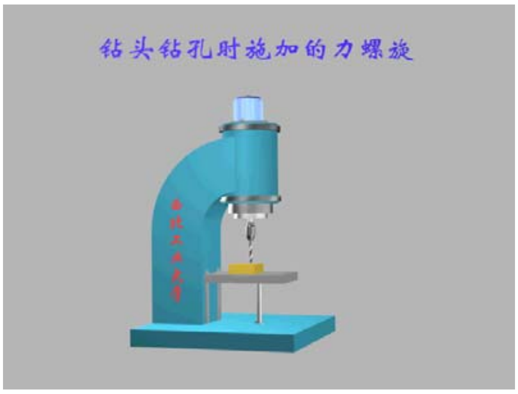
(a)



(b)

南京大学 NANJING UNIVERSITY

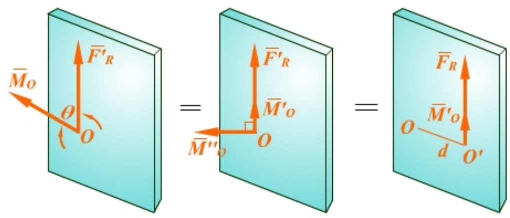
第四章 空间力系



第四章 空间力系

$\vec{F}_R' \neq 0, \vec{M}_O \neq 0, \vec{F}_R', \vec{M}_O$ **既不平行也不垂直**

➡ **力螺旋中心轴距简化中心为** $d = \dfrac{M_O \sin\theta}{F_R'}$



（4）平衡

$\vec{F}_R' = 0, \vec{M}_O = 0$ ➡ **平衡**

第四章 空间力系

§4–5 空间任意力系的平衡方程

1.空间任意力系的平衡方程

空间任意力系平衡的充要条件：

该力系的主矢、主矩分别为零.

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0$$

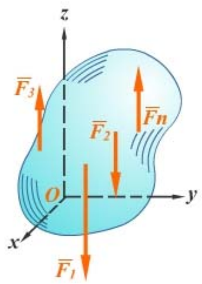
$$\sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0 \quad \sum M_z = 0$$

空间任意力系平衡的充要条件：所有各力在三个坐标轴中每一个轴上的投影的代数和等于零，以及这些力对于每一个坐标轴的矩的代数和也等于零.

第四章 空间力系

空间平行力系的平衡方程

$$\sum F_z = 0 \quad \sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0$$



2.空间约束类型举例

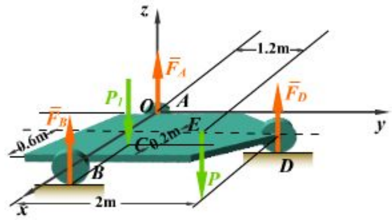
3.空间力系平衡问题举例

第四章 空间力系

例4-8 已知：P=8kN,$P_1=10$kN, 各尺寸如图

求：A、B、D 处约束力

解：研究对象：小车



列平衡方程

$$\sum F_z=0 \qquad -P-P_1+F_A+F_B+F_D=0$$

$$\sum M_x(F)=0 \qquad -0.2P_1-1.2P+2F_D=0$$

$$\sum M_y(F)=0 \qquad 0.8P_1+0.6P-1.2F_B-0.6F_D=0$$

$$\Rightarrow F_D=5.8\text{kN}, F_B=7.777\text{kN}, F_A=4.423\text{kN}$$

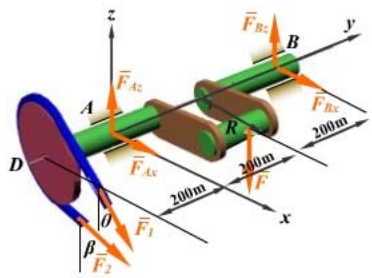
南京大学 NANJING UNIVERSITY

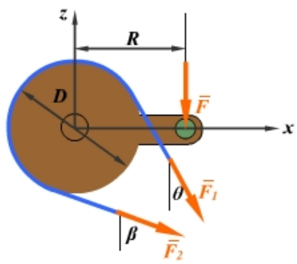
第四章 空间力系

例4-9 已知：$F=2000$N, $F_2=2F_1, \theta=30^\circ, \beta=60^\circ$, 尺寸如图

求：F_1, F_2 及A、B处约束力

解：研究对象，曲轴





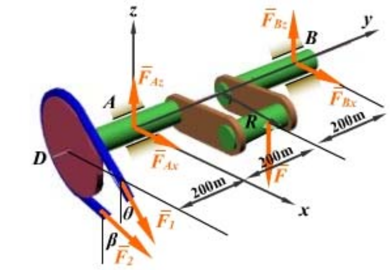
列平衡方程

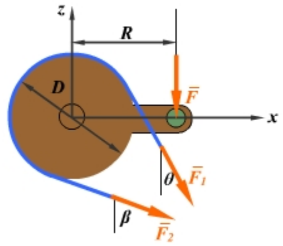
$$\sum F_x=0 \qquad F_1\sin 30^\circ+F_2\sin 60^\circ+F_{Ax}+F_{Bx}=0$$

$$\sum F_y=0 \qquad 0=0$$

南京大学 NANJING UNIVERSITY

第四章 空间力系





$$\sum F_z = 0 \qquad -F_1\cos 30^\circ - F_2\cos 60^\circ - F + F_{Az} + F_{Bz} = 0$$

$$\sum M_x(F) = 0$$

$$F_1\cos 30^\circ \times 200 + F_2\cos 60^\circ \times 200 - F\times 200 + F_{Bz}\times 400 = 0$$

$$\sum M_y(F) = 0 \qquad F\cdot R - \frac{D}{2}\times(F_2 - F_1) = 0$$

$$\sum M_z(F) = 0 \qquad (F_1\sin 30^\circ - F_2\sin 60^\circ)\times 200 - F_{Bx}\times 400 = 0$$

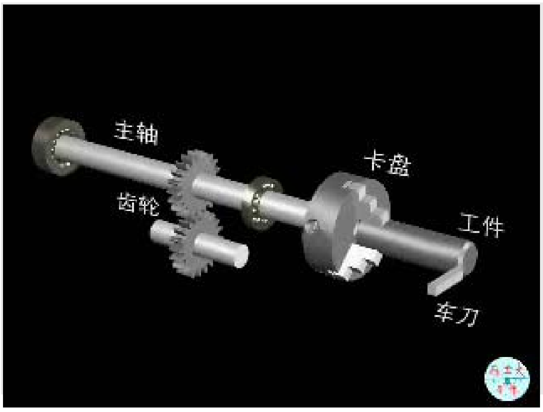
第四章 空间力系

$$F_1 = 3000\text{N}, F_2 = 6000\text{N},$$

$$F_{Ax} = -1004\text{N}, F_{Az} = 9397\text{N},$$

$$F_{Bx} = 3348\text{N}, F_{Bz} = -1799\text{N},$$

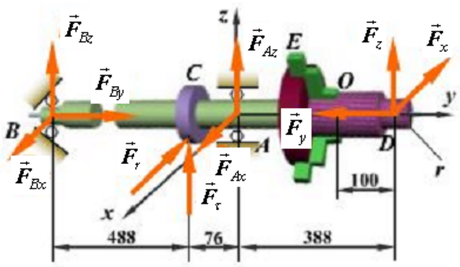
第四章 空间力系



第四章 空间力系

例4-10

已知：$F_x = 4.25\text{N}$, $F_y = 6.8\text{N}$, $F_z = 17\text{N}$,
$F_r = 0.36F_\tau$, $R = 50\text{mm}$, $r = 30\text{mm}$ 各尺寸如图



求：(1) $\vec{F}_r, \vec{F}_\tau$（2）A、B处约束力（3）O 处约束力

第四章 空间力系

解：研究对象1：主轴及工件，受力图如图

$$\sum F_x = 0 \qquad -F_\tau + F_{Bx} + F_{Ax} - F_x = 0$$

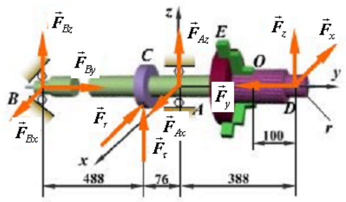
$$\sum F_y = 0 \qquad F_{By} - F_y = 0$$

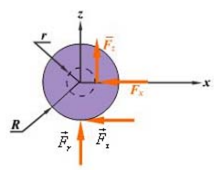
$$\sum F_z = 0 \qquad F_\tau + F_{Bz} + F_{Az} - F_z = 0$$

$$\sum M_x(F) = 0 \qquad -(488+76)F_{Bz} - 76F_\tau + 388F_z = 0$$

$$\sum M_y(F) = 0 \qquad F_\tau \cdot R - F_z \cdot r = 0$$

$$\sum M_z(F) = 0 \qquad -76F_r + (488+76)F_{Bx} - 30F_y + 388F_x = 0$$





第四章 空间力系

又： $F_r = 0.36F_\tau$,

$F_\tau = 10.2\text{kN}$, $\quad F_r = 3.67\text{kN}$,

$F_{Ax} = 15.64\text{kN}$, $\quad F_{Az} = -31.87\text{kN}$,

$F_{Bx} = -1.19\text{kN}$, $\quad F_{By} = 6.8\text{kN}$, $\quad F_{Bz} = 11.2\text{kN}$,

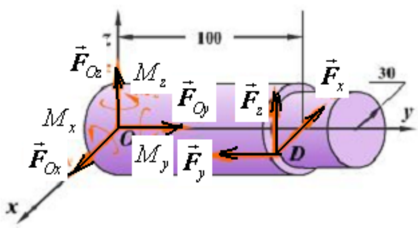
研究对象2：工件受力图如图

列平衡方程

$$\sum F_x = 0 \qquad F_{Ox} - F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \qquad F_{Oy} - F_y = 0$$

$$\sum F_z = 0 \qquad F_{Oz} + F_z = 0$$



第四章 空间力系

$$\sum M_x(F)=0 \qquad 100F_Z + M_x = 0$$

$$\sum M_y(F)=0 \qquad -30F_Z + M_y = 0$$

$$\sum M_z(F)=0 \qquad 100F_x - 30F_y + M_z = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{Ox} = 4.25\,\mathbf{kN},\ F_{Oy} = 6.8\,\mathbf{kN},\ F_{Oz} = -17\,\mathbf{kN}$$

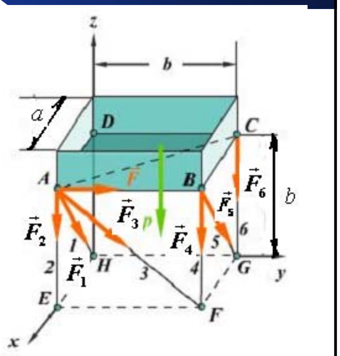
$$M_x = -1.7\,\mathbf{kN\cdot m},\ M_y = 0.51\,\mathbf{kN\cdot m},\ M_z = -0.22\,\mathbf{kN\cdot m}$$

第四章 空间力系

例4-11　已知：F、P及各尺寸　　求：杆内力

解：研究对象，长方板

列平衡方程



$$\sum M_{AB}(\vec{F})=0 \qquad -F_6\cdot a - \frac{a}{2}\cdot P = 0 \qquad F_6 = -\frac{P}{2}$$

$$\sum M_{AE}(\vec{F})=0 \qquad F_5 = 0$$

$$\sum M_{AC}(\vec{F})=0 \qquad F_4 = 0$$

$$\sum M_{EF}(\vec{F})=0 \qquad -F_6\cdot a - \frac{a}{2}\cdot P - F_1\cdot\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0 \qquad F_1 = 0$$

$$\sum M_{FG}(\vec{F})=0 \qquad Fb - \frac{b}{2}\cdot P - F_2 b = 0 \qquad F_2 = 1.5P$$

$$\sum M_{BC}(\vec{F})=0 \qquad -F_2\cdot b - \frac{b}{2}\cdot P - F_3\cdot\cos 45^\circ\cdot b = 0 \qquad F_3 = -2\sqrt{2}P$$

第四章 空间力系

§4–6 重 心

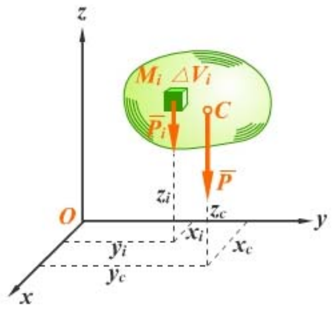
1．计算重心坐标的公式

$$P \cdot x_C = P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2 + \ldots + P_n \cdot x_n = \sum P_i \cdot x_i$$

$$x_C = \frac{\sum P_i x_i}{P}$$

$$-P \cdot y_C = -P_1 \cdot y_1 - P_2 \cdot y_2 - \ldots - P_n \cdot y_n = -\sum P_i \cdot y_i$$

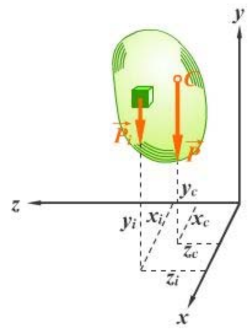
$$y_C = \frac{\sum P_i y_i}{P}$$



第四章 空间力系

$$-P \cdot z_C = -P_1 \cdot z_1 - P_2 \cdot z_2 - \ldots - P_n \cdot z_n = -\sum P_i \cdot z_i$$

$$z_C = \frac{\sum P_i z_i}{P}$$



计算重心坐标的公式为

$$x_C = \frac{\sum P_i x_i}{P} \quad y_C = \frac{\sum P_i y_i}{P} \quad z_C = \frac{\sum P_i z_i}{P}$$

对均质物体，均质板状物体，有

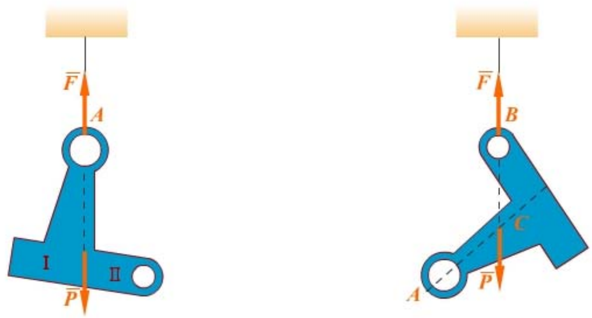
$$x_C = \frac{\sum V_i x_i}{V} \quad y_C = \frac{\sum V_i y_i}{V} \quad z_C = \frac{\sum V_i z_i}{V}$$

$$x_C = \frac{\sum A_i x_i}{A} \quad y_C = \frac{\sum A_i y_i}{A} \quad z_C = \frac{\sum A_i z_i}{A}$$

称为重心或形心公式

2． 确定重心的悬挂法与称重法

（1）悬挂法



(a) (b)

第四章 空间力系

www.slope.com.cn

（2）称重法

$P\cdot x_C = F_1\cdot l$ 则 $x_C=\frac{F_1}{P}l$

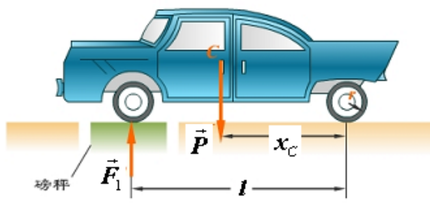
有 $x_C'=\frac{F_2}{P}l'$

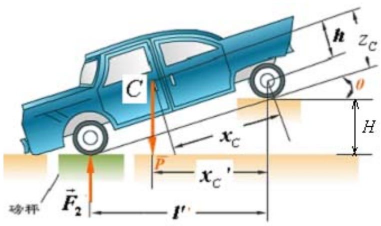
$l'=l\cos\theta$

$x_C'=x_C\cos\theta+h\sin\theta$

$\sin\theta=\frac{H}{l}$ $\cos\theta=\frac{\sqrt{l^2-H^2}}{l}$

$z_C=r+\frac{F_2-F_1}{P}\cdot\frac{1}{H}\cdot\sqrt{l^2-H^2}$





第四章 空间力系

例4-12 已知：均质等厚Z字型薄板尺寸如图所示.

求：其重心坐标

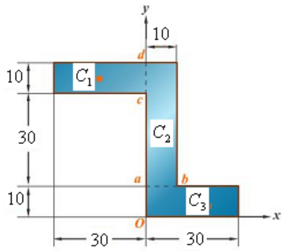
解:厚度方向重心坐标已确定，只求重心的x,y坐标即可.

用虚线分割如图，为三个小矩形，其面积与坐标分别为

$x_1=-15\text{mm}$ $y_1=45\text{mm}$ $A_1=300\text{mm}^2$

$x_2=5\text{mm}$ $y_2=30\text{mm}$ $A_2=400\text{mm}^2$

$x_3=15\text{mm}$ $y_3=5\text{mm}$ $A_3=300\text{mm}^2$



则

$$x_C=\sum\frac{A_i x_i}{A}=\frac{A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3}{A_1+A_2+A_3}=2\text{mm}$$

$$y_C=\sum\frac{A_i y_i}{A}=\frac{A_1y_1+A_2y_2+A_3y_3}{A_1+A_2+A_3}=27\text{mm}$$

第四章 空间力系

例4-13已知：等厚均质偏心块的 $R=100\text{mm}, r=17\text{mm}, b=13\text{mm}$

求：其重心坐标.

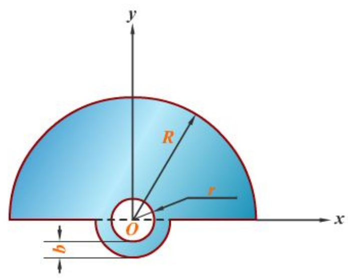
解：用负面积法，为三部分组成.

由对称性，有 $x_C=0$

$$A_1=\frac{\pi}{2}R^2, A_2=\frac{\pi}{2}(r+b)^2, A_3=-\pi r^2$$

$$y_1=\frac{4R}{3\pi}, y_2=-\frac{4(r+b)}{3\pi}, y_3=0$$

由 $y_C=\frac{\sum A_i y_i}{A}$



得 $y_C=\frac{A_1y_1+A_2y_2+A_3y_3}{A_1+A_2+A_3}=40.01\text{mm}$

第四章 空间力系

本章小结

1、力对点的矩的计算

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$= (yF_z - zF_y)\,\mathbf{i} + (zF_x - xF_z)\,\mathbf{j} + (xF_y - yF_x)\,\mathbf{k}$$

2、力对点的矩与力对轴的矩的关系

$$[\mathrm{M}_O(\mathrm{F})]_x = \mathrm{M}_x(\mathrm{F})$$

$$[\mathrm{M}_O(\mathrm{F})]_y = \mathrm{M}_y(\mathrm{F})$$

$$[\mathrm{M}_O(\mathrm{F})]_z = \mathrm{M}_z(\mathrm{F})$$

南京大学 NANJING UNIVERSITY

第四章 空间力系

3、合力矩定理

$$M_O(F_R) = \sum M_O(F)$$

即：空间任意力系的合力对于任意一点的矩等于各分力对同一点的矩的矢量和。

将上式向任意轴投影（如 z 轴）得：

$$M_z(R) = \sum M_z(F)$$

4、空间任意力系向一点简化，可得一个大小和方向等于该力系的主矢，作用线通过简化中心的力和一个力偶。

$$F_R' = \sum_{i=1}^{n} F_i \qquad M_O = \sum_{i=1}^{n} M_O(F_i)$$

5、空间任意力系平衡方程的基本形式

$$\begin{cases} \sum F_x = 0;\ \sum F_y = 0;\ \sum F_z = 0 \\ \sum M_x(\vec{F}) = 0;\ \sum M_y(\vec{F}) = 0;\ \sum M_z(\vec{F}) = 0 \end{cases}$$

南京大学 NANJING UNIVERSITY

第四章 空间力系

▪几种特殊情形平衡规律

[Ⅰ] 汇交力系

$\sum F_x = 0,\ \sum F_y = 0,\ \sum F_z = 0$

[Ⅱ] 平行力系（假定力的作用线平行 z 轴）

$\sum Z = 0,\ \sum M_x = 0,\ \sum M_y = 0$

[Ⅲ] 平面一般力系（假定力的作用面为Oxy面）

$\sum F_x = 0,\ \sum F_y = 0,\ \sum M_z = 0$

[IV] 力偶系

$\sum M_x = 0,\ \sum M_y = 0,\ \sum M_z = 0$

第四章 空间力系

www.slope.com.cn

6、不变形的物体（刚体）在地表面无论怎样放置，其平行分布重力的合力作用线都通过此物体上的一个确定的点，这一点称为物体的<u>重心</u>

重心的坐标公式：

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} P_i} \qquad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} P_i} \qquad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} P_i}$$

作业：无