Engineering Mechanics 工程力学

朱鸿鹄
南京大学地球科学与工程学院

第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

10-1 概述

1、问题的提出

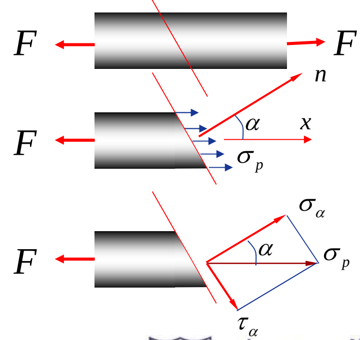
问题1：同一点处不同方位截面上的应力不相同

轴向拉伸杆件

横截面应力：$\sigma = \dfrac{F}{A}$

斜截面应力：$\sigma_\alpha = \sigma \cos^2 \alpha$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma}{2}\sin(2\alpha)$$

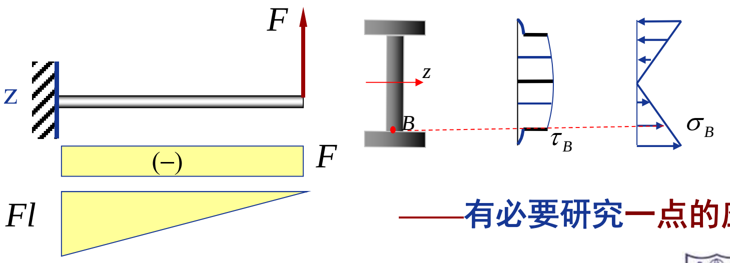


第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

问题2：B点处应力该如何校核？

梁弯曲的强度条件：

$$\sigma_{\max}=\frac{M_{\max}}{W_z}\le[\sigma]\ ,\quad \tau_{\max}=\frac{QS^*_{\max}}{I_z\cdot b}\le[\tau].$$



——有必要研究一点的应力状态

第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

www.slope.com.cn

2、应力状态的概念

应 力

指明

哪一个面上？
哪一点？

哪一点？
哪个方向面？

受力构件内过一点不同方位截面上的应力情况，称为这一点的应力状态（Stress State）

研究应力状态的目的：找出一点处沿不同方向应力的变化规律，确定出最大应力，从而全面考虑构件破坏的原因，建立适当的强度条件

南京大学
NANJING UNIVERSITY

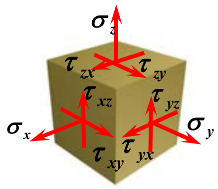
第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

3、一点的应力状态的描述

研究一点的应力状态，可对一个包围该点的微小正六面体—单元体(element)进行分析

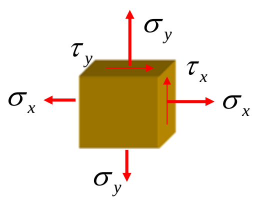
各边边长　dx，dy，dz

在单元体各面上标上应力— 应力单元体



第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

4、应力状态的分类



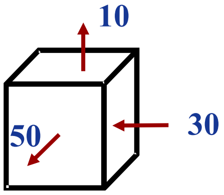
（1）主平面与主应力

主平面：剪应力为零的平面

主应力：作用于主平面上的正应力

过一点总存在三对相互垂直的主平面，对应于三个主应力

主应力排列规定：按代数值由大到小 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

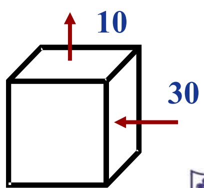


单位：MPa

$\sigma_1 = 50;$

$\sigma_2 = 10;$

$\sigma_3 = -30;$



$\sigma_1 = 10;$

$\sigma_2 = 0;$

$\sigma_3 = -30;$

第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

（2）应力状态的分类

a、单向应力状态：只有一个主应力不等于零，另两个主应力都等于零的应力状态

b、二向应力状态：有两个主应力不等于零 ，另一个主应力等于零的应力状态

c、三向应力状态：三向主应力都不等于零的应力状态

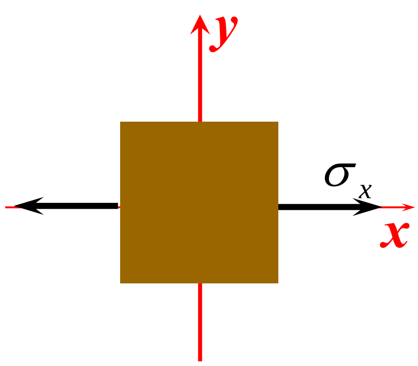
简单应力状态：单向应力状态

复杂应力状态：二向应力状态和三向应力状态的总称

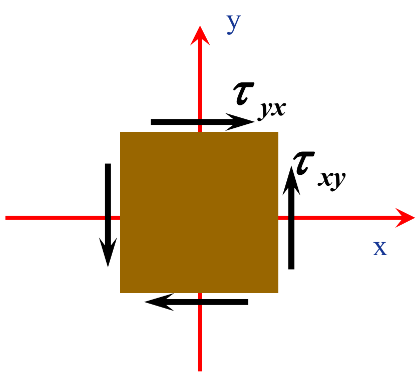
纯剪切应力状态：单元体上只存在剪应力无正应力

第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

www.slope.com.cn



单向应力状态



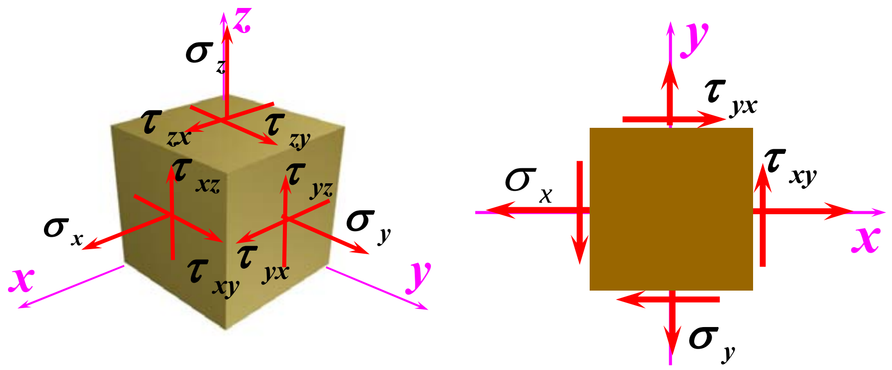
纯剪应力状态

第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

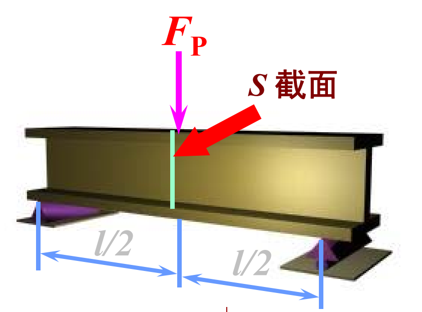
平面应力状态(Plane-stress state)：单向应力状态和二向应力状态的总称

空间应力状态：三向应力状态

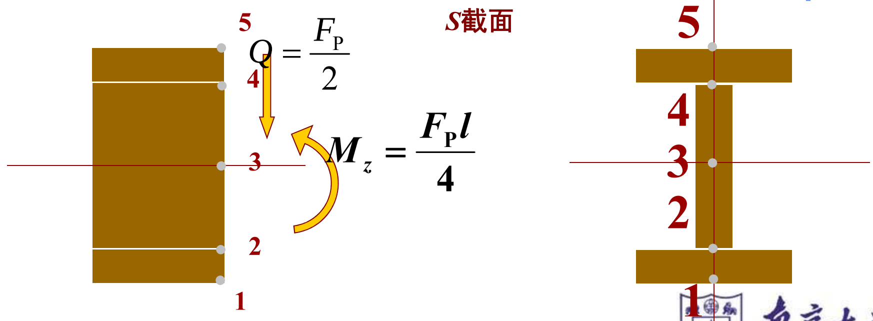
空间应力状态（三维视图） 平面应力状态(二维视图)



第10章 应力状态与强

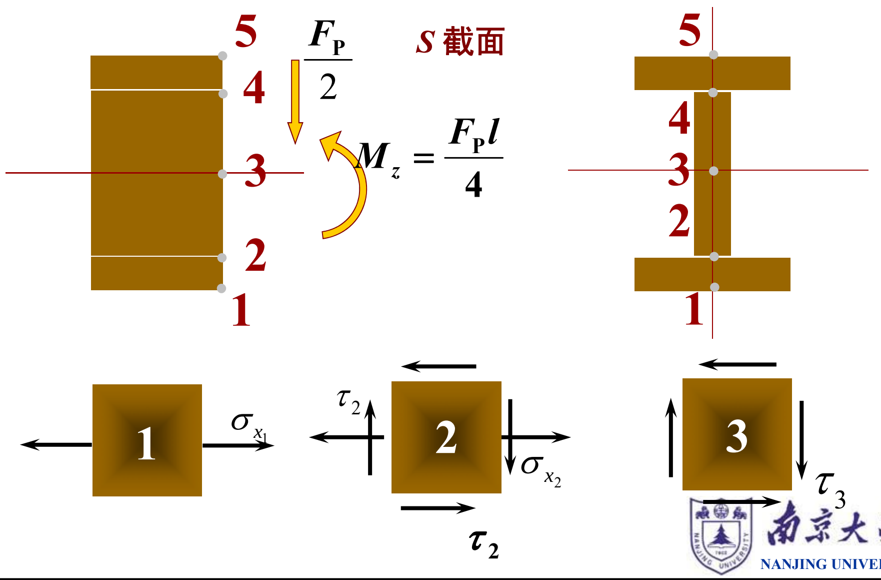


取单元体示例一



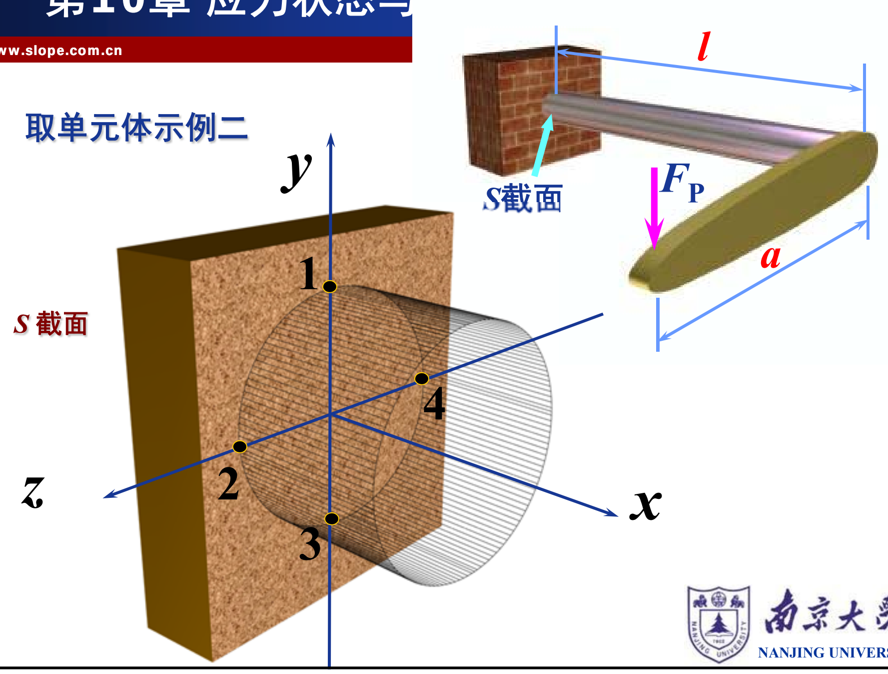
NANJING UNIVERSITY

第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

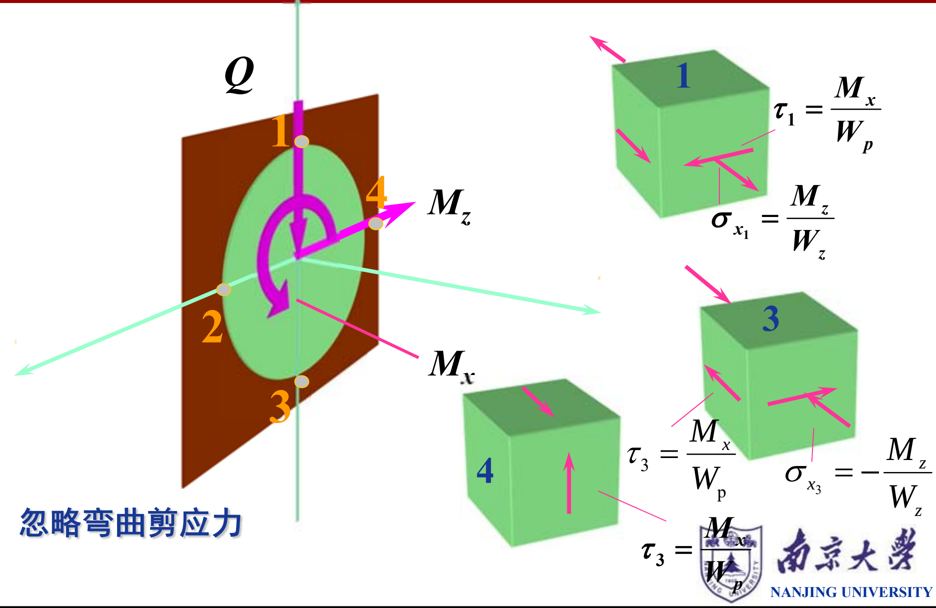


第10章 应力状态与

取单元体示例二



第10章 应力状态与强度理论及其工程应用



忽略弯曲剪应力

南京大学 NANJING UNIVERSITY

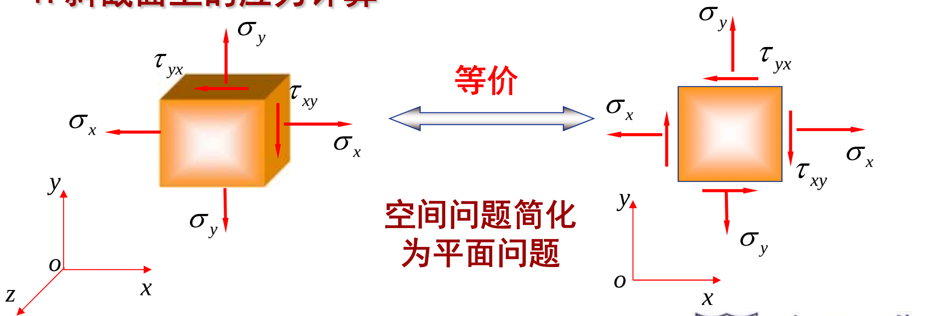
第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

10-2 平面应力状态的应力分析

应力分析的两种方法：解析法和图解法

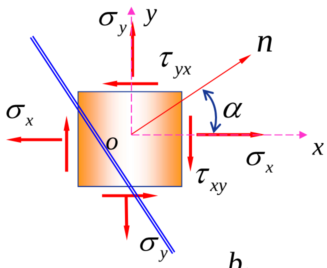
一、解析法

1. 斜截面上的应力计算

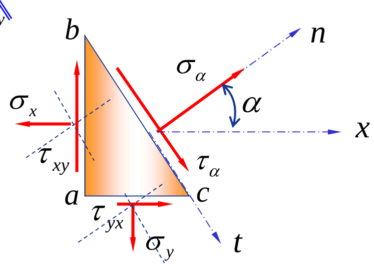


南京大学 NANJING UNIVERSITY

第10章 应力状态与强度理论及其工程应用



α -- 逆时针转为正



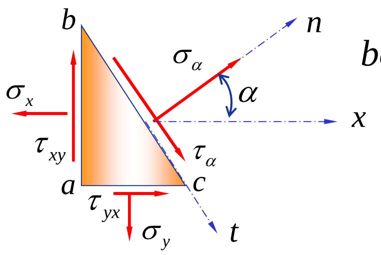
单元体各面面积

bc: dA

ab: $dA\cdot\cos\alpha$

ac: $dA\cdot\sin\alpha$

第10章 应力状态与强度理论及其工程应用



bc: dA; ab: $dA\cdot\cos\alpha$; ac: $dA\cdot\sin\alpha$

设：斜截面面积为 dA，由分离体平衡得： $\sum F_n = 0$

$$\sigma_\alpha dA - (\sigma_x dA\cos\alpha)\cos\alpha + (\tau_x dA\cos\alpha)\sin\alpha$$

$$-(\sigma_y dA\sin\alpha)\sin\alpha + (\tau_y dA\sin\alpha)\cos\alpha = 0$$

第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

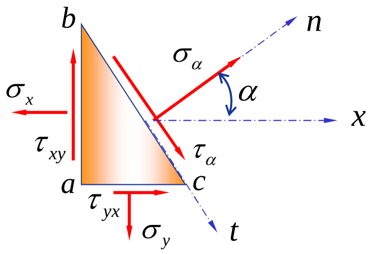
www.slope.com.cn

$$\sum F_t = 0,\quad \tau_\alpha \cdot dA - (\sigma_x dA\cos\alpha)\sin\alpha - (\tau_x dA\cos\alpha)\cos\alpha$$
$$+(\sigma_y dA\sin\alpha)\cos\alpha + (\tau_y dA\sin\alpha)\sin\alpha = 0$$

由剪应力互等定理和三角变换，可得：

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha$$



符号规定：1）“σ_α”正负号同“σ”（拉正压负）

2）“τ_α”正负号同“τ”（顺正逆负）

3）“α”为斜面的外法线与 x 轴正向的夹角，逆时针为正，顺时针为负。注意：用公式计算时要代入相应的正负号

第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

www.slope.com.cn

讨论：

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha \qquad (1)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha \qquad (2)$$

1) $\sigma_\alpha + \sigma_{\alpha\pm 90^0} = \sigma_x + \sigma_y$

南京大学 NANJING UNIVERSITY

第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

2) σ_α 的极值 主应力以及主平面方位

已知 $\sigma_\alpha = \dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha$

为求极值，令 $\left.\dfrac{d\sigma_\alpha}{d\alpha}\right|_{\alpha=\alpha_0} = 0$

$$\left.\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha}\right|_{\alpha=\alpha_0} = -\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\alpha_0 - \tau_{xy}\cos 2\alpha_0 = 0 = -2\tau_{\alpha_0}$$ 即 $\tau_{\alpha_0} = 0$

并得到 $\tan 2\alpha_0 = \dfrac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$

可确定出两个相互垂直的平面——主平面，分别为最大正应力和最小正应力所在平面

NANJING UNIVERSITY

第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

www.slope.com.cn

将 $\tan 2\alpha_0 = \dfrac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$ **代入原式，得到**

$$\begin{cases} \sigma_{\alpha\max} = \dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ \sigma_{\alpha\min} = \dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \end{cases}$$

南京大学 NANJING UNIVERSITY

第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

3）剪应力τ_α的极值及所在截面

由 $$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha,$$

令 $$\left.\frac{d\tau_\alpha}{d\alpha}\right|_{\alpha=\alpha_1} = 0 \Rightarrow \tan 2\alpha_1 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

$(\alpha_1; \quad \alpha_1' = \alpha_1 \pm 90^0)$ —最大剪应力所在的位置

$$\begin{cases} \tau_{max} = \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}{}^2} \\ \tau_{min} = -\sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}{}^2} \end{cases}$$

——xy 面内的最大剪应力

$$\tan 2\alpha_0 \tan 2\alpha_1 = -1 \Rightarrow (\alpha_1 = \alpha_0 + 45^0)$$

南京大学 NANJING UNIVERSITY

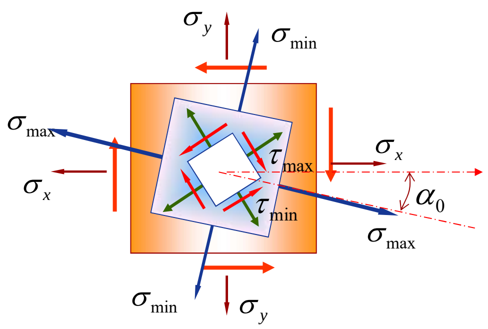
第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

将 τ_{max} 与 $\sigma_{max}, \sigma_{min}$ 画在原单元体上

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$ ——主平面的位置 $(\alpha_0; \quad \alpha_0' = \alpha_0 \pm 90^0)$

$$\tan 2\alpha_1 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$ ——最大剪应力所在的位置 $(\alpha_1; \quad \alpha_1' = \alpha_1 \pm 90^0)$

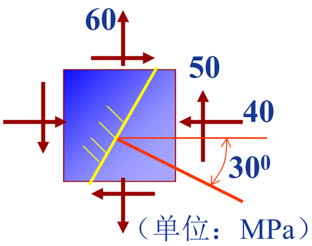
$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_0 + 45^0$



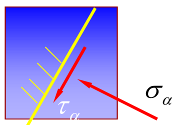
南京大学 NANJING UNIVERSITY

第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

例：如图所示单元体，求α斜面的应力及主应力、主平面。



（单位：MPa）



解：1、求斜面的应力

$$\sigma_x = -40,\ \sigma_y = 60,\ \tau_x = -50,\ \ \alpha = -30^\circ$$

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha$$

$$= \frac{-40+60}{2} + \frac{-40-60}{2}\cos(-60^0)$$

$$-(-50)\sin(-60^0) = -58.3(MPa)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha$$

$$= \frac{-40-60}{2}\sin(-60^0) + (-50)\cos(-60^0) = 18.3(MPa)$$

NANJING UNIVERSITY

第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

www.slope.com.cn

2、求主应力、主平面

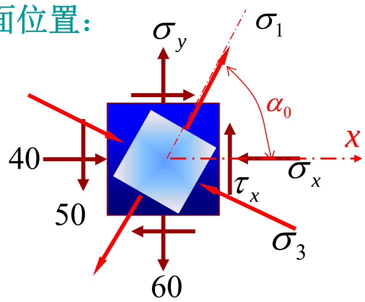
主应力：

$$\sigma_{\substack{\max\\ \min}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$= \frac{-40+60}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-40-60}{2}\right)^2 + (-50)^2} = \begin{cases} +80.7(MPa) \\ -60.7(MPa) \end{cases}$$

$$\therefore\ \ \sigma_1 = 80.7\ (MPa),\ \sigma_2 = 0,\ \sigma_3 = -60.7\ (MPa)$$

主平面位置：



$$\tan 2\alpha_0 = \frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

$$= \frac{-2(-50)}{-40-60} = -1$$

$$\Rightarrow \alpha_0 = 67.5^0$$

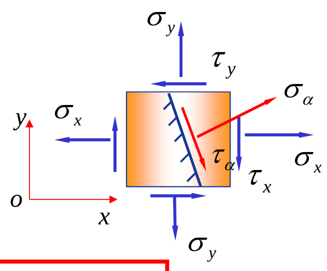
南京大学 NANJING UNIVERSITY

第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

二、图解法(Graphical method)求主应力

1.应力圆（莫尔圆 Mohr's Circle）

$$\begin{cases}\sigma_\alpha = \dfrac{1}{2}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) + \dfrac{1}{2}\left(\sigma_x - \sigma_y\right)\cos 2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha \\ \tau_\alpha = \dfrac{1}{2}\left(\sigma_x - \sigma_y\right)\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha\end{cases}$$



对上述方程消参数（2α），得：

$$\boxed{\left(\sigma_\alpha - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2_\alpha = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2_{xy}}$$

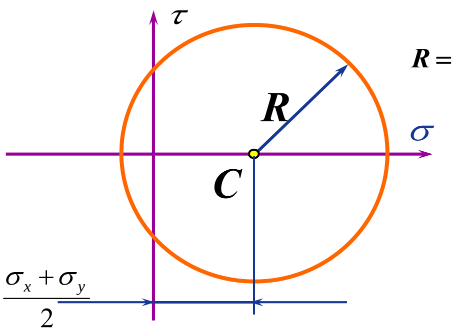
这个方程恰好表示一个圆，这个圆称为应力圆

南京大学 NANJING UNIVERSITY

第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

应力圆方程： $\left(\sigma_\alpha - \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2_\alpha = \left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2_{xy}$

圆心： $\left(\dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0\right)$ **半径：** $R = \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$



$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2_{xy}}$$

南京大学 NANJING UNIVERSITY

第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

德国学者Christian Otto Mohr(1835-1918)

铁道工程师，斯图加特理工学院、德累斯顿理工学院教授

---Mohr Circle (1882)

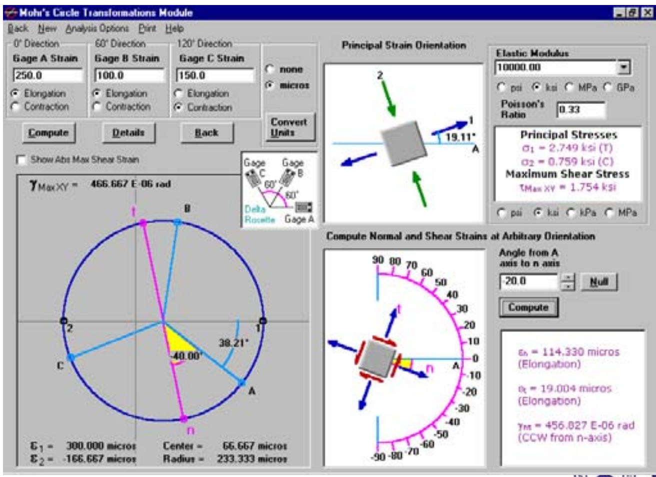
----Mohr-Coulomb Theory(土力学的重要理论之一)

$$\tau = \sigma \tan(\phi) + c$$

第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

www.slope.com.cn

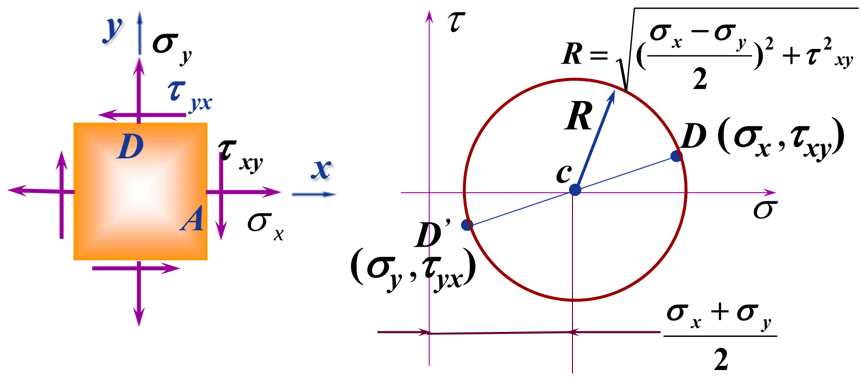
应力圆相关软件MDSolids （http://www.mdsolids.com/）



第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

www.slope.com.cn

2. 应力圆的画法



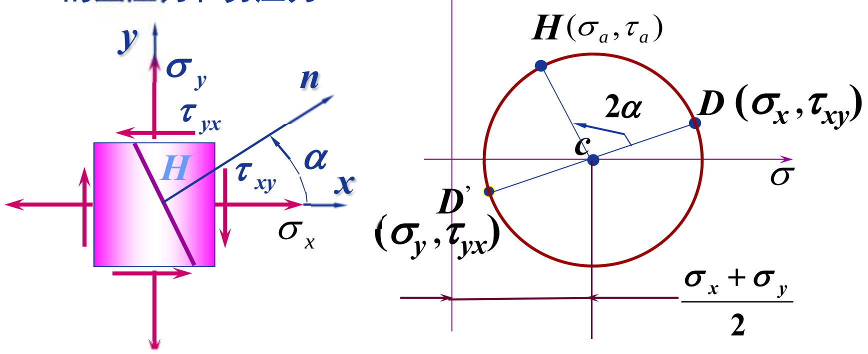
NANJING UNIVERSITY

第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

www.slope.com.cn

3. 几个对应关系

点面对应——应力圆上某一点的坐标值对应着单元体某一截面上的正应力和剪应力

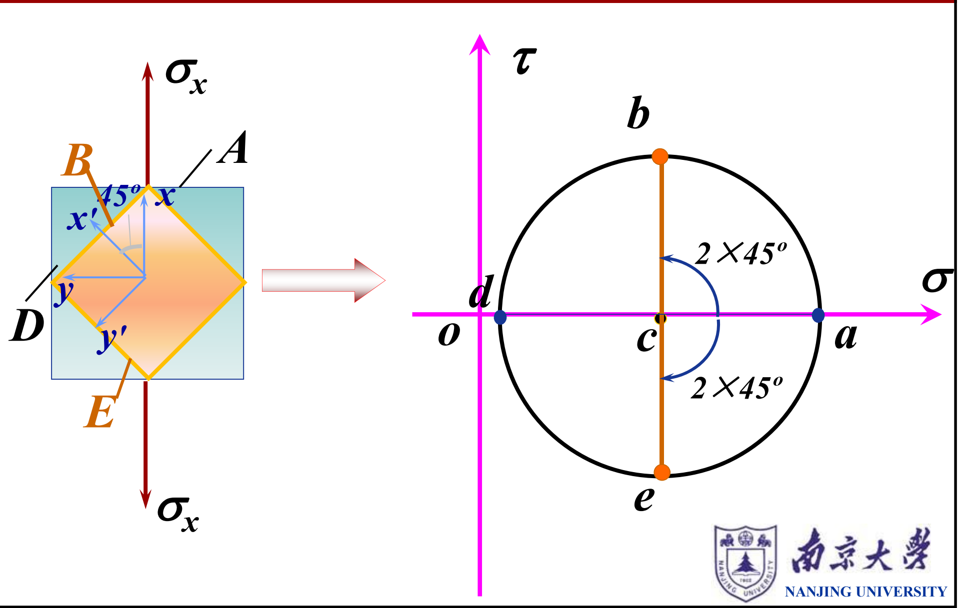


转向对应——半径旋转方向与截面法线的旋转方向一致

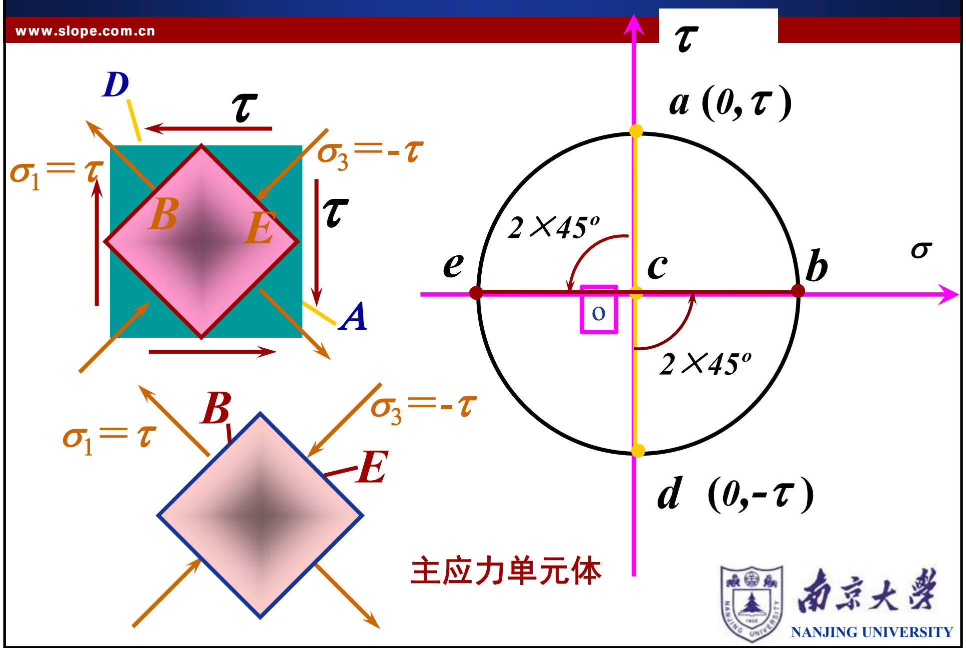
二倍角对应——半径转过的角度是截面法线旋转角度的2倍

NANJING UNIVERSITY

第10章 应力状态与强度理论及其工程应用



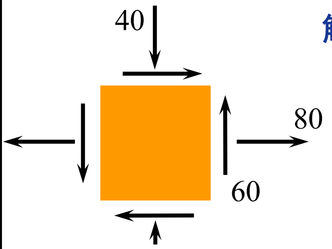
第10章 应力状态与强度理论及其工程应用



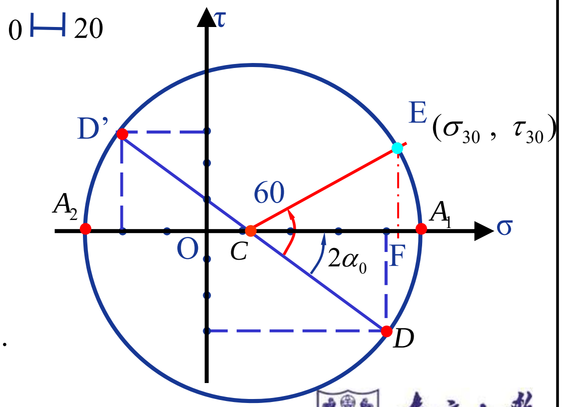
第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

例：求 1）图示单元体 $\alpha=30^0$ 斜截面上的应力

2）主应力、主平面（单位：MPa）



解：1、按比例画此单元体对应的应力圆



2、量出所求的物理量

$\sigma_{30^0} = OF;\quad \tau_{30^0} = EF.$

$\sigma_1 = OA_1;\quad \sigma_2 = 0;\quad \sigma_3 = OA_2.$

$\alpha_0 = \dfrac{\angle DCA_1}{2}.$

南京大学 NANJING UNIVERSITY

第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

三、双向应力状态下的应变分析(略)

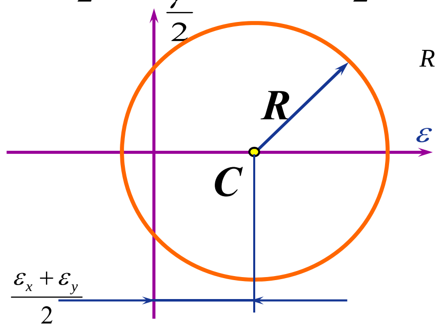
$$\begin{cases} \varepsilon_\alpha = \dfrac{1}{2}\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y\right) + \dfrac{1}{2}\left(\varepsilon_x - \varepsilon_y\right)\cos 2\alpha - \dfrac{1}{2}\gamma_{xy}\sin 2\alpha \\ \dfrac{1}{2}\gamma_\alpha = \dfrac{1}{2}\left(\varepsilon_x - \varepsilon_y\right)\sin 2\alpha + \dfrac{1}{2}\gamma_{xy}\cos 2\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_\alpha = \dfrac{1}{2}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) + \dfrac{1}{2}\left(\sigma_x - \sigma_y\right)\cos 2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha \\ \tau_\alpha = \dfrac{1}{2}\left(\sigma_x - \sigma_y\right)\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha \end{cases}$$

南京大学 NANJING UNIVERSITY

第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

$$\begin{cases} \varepsilon_\alpha = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y\right) + \frac{1}{2}\left(\varepsilon_x - \varepsilon_y\right)\cos 2\alpha - \frac{1}{2}\gamma_{xy}\sin 2\alpha \\ \frac{1}{2}\gamma_\alpha = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_x - \varepsilon_y\right)\sin 2\alpha + \frac{1}{2}\gamma_{xy}\cos 2\alpha \end{cases}$$



$$R = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\gamma_{xy}^2}$$

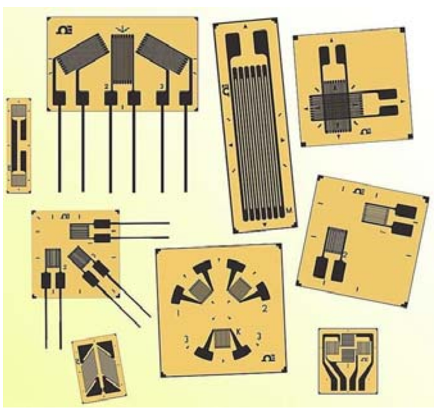
应变圆

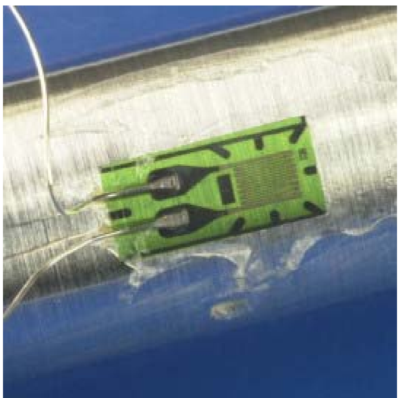
(Strain circle)

第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

四、应变测量（略）

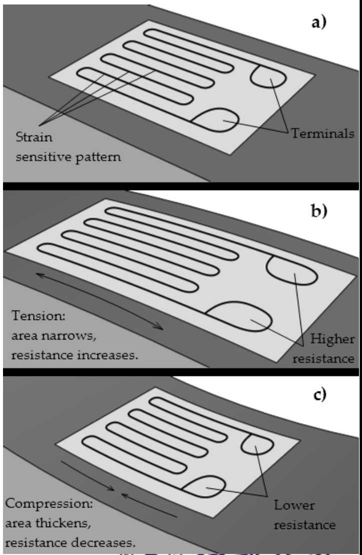
电阻应变片 (Electrical resistance strain gauge)





第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

应变片组成部分：基底、敏感栅、引线

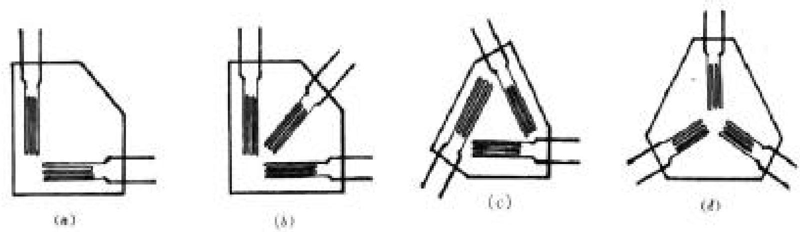


工作原理：电阻值和线应变的线性关系

NANJING UNIVERSITY

第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

应变花（Strain gauge rosette）



主应变及主方向的确定：

$$\varepsilon_{1,2}=\frac{\varepsilon_0+\varepsilon_{90}}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_0-\varepsilon_{90})^2+(2\varepsilon_{45}-\varepsilon_0-\varepsilon_{90})^2}$$

$$tg2\alpha=\frac{2\varepsilon_{45}-\varepsilon_0-\varepsilon_{90}}{\varepsilon_0-\varepsilon_{90}}$$

南京大学
NANJING UNIVERSITY

第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

www.slope.com.cn

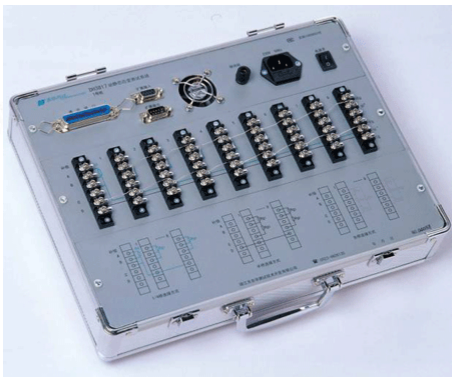
应变读数仪（Datalogger）

NANJING UNIVERSITY

第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

www.slope.com.cn

应变读数仪（Datalogger）



南京大学

NANJING UNIVERSITY

第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

10-3 三向应力状态及应变能密度（略）

第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

10-4 强度理论及其相当应力

一、四个常用的强度理论

强度理论（准则）：

人们根据大量的破坏现象，通过判断推理、概括，提出了种种关于破坏原因的假说，找出引起破坏的主要因素，经过实践检验，不断完善，在一定范围与实际相符合，上升为理论（为了建立复杂应力状态下的强度条件，而提出的关于材料破坏原因的假设及计算方法）

第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

构件在静载荷作用下的两种失效形式：

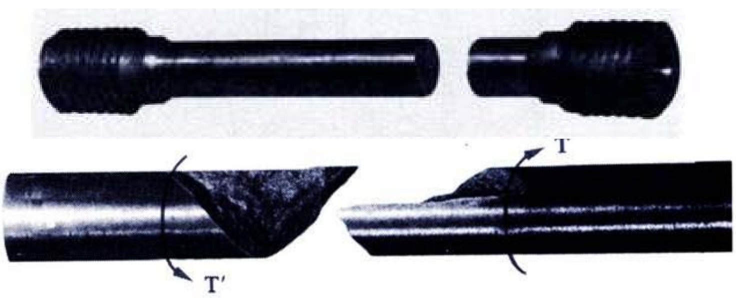
(1) 脆性断裂（Brittle rupture）：材料无明显的塑性变形即发生断裂，断面较粗糙，且多发生在垂直于最大正应力的截面上，如铸铁受拉、扭，低温脆断等

(2) 塑性屈服(Plastic yielding)：材料破坏前发生显著的塑性变形，破坏断面粒子较光滑，且多发生在最大剪应力面上，例如低碳钢受拉、扭，铸铁受压

第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

www.slope.com.cn

脆性材料抗拉能力差，受拉破坏时无明显颈缩现象，受扭时构件沿45度斜截面因拉应力而破坏



南京大学 NANJING UNIVERSITY

第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

1. 最大拉应力理论（第一强度准则）
   Maximum-Normal-Stress Theory

材料发生脆性断裂的主要因素是最大拉应力达到极限值

$$\sigma_1 = \sigma^0$$

σ_1 —构件危险点的最大拉应力

σ^0 —极限拉应力，由单向拉伸实验测得 $\sigma^0 = \sigma_b$

第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

www.slope.com.cn

最大拉应力准则（第一强度准则）

强度条件 $$\sigma_1 \le \frac{\sigma_b}{n} = [\sigma]$$

断裂条件 $$\sigma_1 = \sigma_b$$

南京大学
NANJING UNIVERSITY

第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

2. 最大伸长线应变理论（第二强度准则）

无论材料处于什么应力状态，只要发生脆性断裂，都是由于最大拉应变（线变形）达到极限值导致的

$$\varepsilon_1 = \varepsilon^0$$

ε_1 一构件危险点的最大伸长线应变 $\varepsilon_1 = [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]/E$

ε^0 一极限伸长线应变，由单向拉伸实验测得 $\varepsilon^0 = \sigma_b / E$

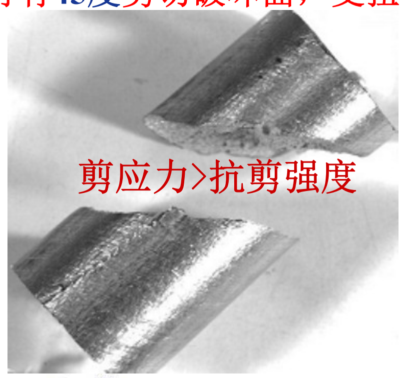
断裂条件 $\frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{\sigma_b}{E}$ 即 $\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_b$

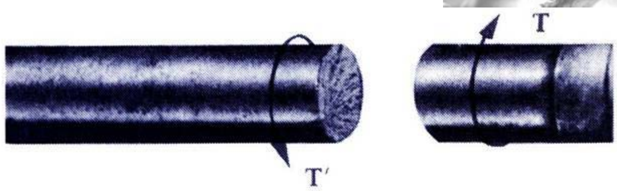
强度条件 $\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \le \frac{\sigma_b}{n} = [\sigma]$

NANJING UNIVERSITY

第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

塑性材料抗剪切能力差，受压时有45度剪切破坏面，受扭时构件沿横截面因剪应力而破坏





NANJING UNIVERSITY

第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

3. 最大切应力理论（第三强度准则）Maximum-Shear-Stress Theory

无论材料处于什么应力状态，只要发生屈服，都是由于最大切应力达到了某一极限值

$$\tau_{\max} = \tau^0$$

$\tau_{\max}$ —构件危险点的最大切应力 $\tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$

τ^0 —极限切应力，由单向拉伸实验测得 $\tau^0 = \sigma_s / 2$

NANJING UNIVERSITY

第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

屈服条件 $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_s$

强度条件 $\sigma_1 - \sigma_3 \le \dfrac{\sigma_s}{n_s} = [\sigma]$

实验表明：此理论对于塑性材料的屈服破坏能够得到较为满意的解释，并能解释材料在三向均压下不发生塑性变形或断裂的事实

NANJING UNIVERSITY

第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

4. 形状改变能密度理论（第四强度准则）

Maximum-Distortion-Energy Theory

无论材料处于什么应力状态，只要发生屈服，都是由于单元体的最大形状改变比能达到一个极限值

$$v_{\mathrm{d}} = v_{\mathrm{d}}^{0}$$

v_d 一构件危险点的形状改变比能

$$v_{\mathrm{d}} = \frac{1+\nu}{6E}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]$$

v_d^0 一形状改变比能的极限值，由单拉实验测得 $v_d^0 = \dfrac{1+\nu}{6E}2\sigma_s{}^2$

第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

形状改变能密度准则

屈服条件： $(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2 = 2\sigma_s^2$

强度条件： $\sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]} \le \frac{\sigma_s}{n_s} = [\sigma]$

实验表明：对塑性材料，此理论比第三强度理论更符合试验结果，所以在工程中得到了广泛应用

二、强度理论的统一表达式： $\sigma_r \le [\sigma]$

σ_r——相当应力

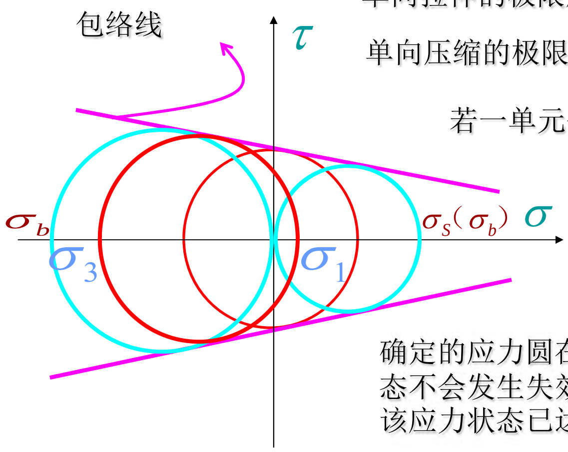
$$\sigma_{r1} = \sigma_1 \le [\sigma]$$

$$\sigma_{r2} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \le [\sigma]$$

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 \le [\sigma]$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2\right]} \le [\sigma]$$

10-5 莫尔强度理论及其相当应力（略）



单向拉伸的极限应力圆

单向压缩的极限应力圆

若一单元体的应力状态：

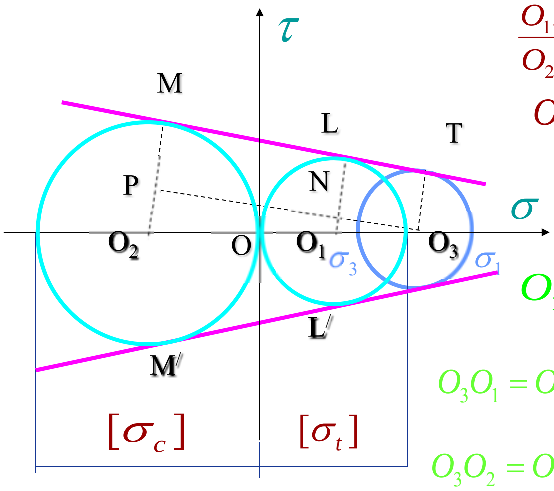
σ_1、σ_2、σ_3

由 σ_1和σ_3

确定的应力圆在包络线之内，则该应力状态不会发生失效。如恰与包络线相切，则该应力状态已达到失效状态。

第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

由σ_1、σ_3确定的应力圆，在ML、M′L′之内，这样的应力圆是安全的，当应力圆与公切线相切时，为许可状态的最高界限。



$$\frac{O_1N}{O_2P}=\frac{O_3O_1}{O_3O_2}$$

$$O_1N=O_1L-O_3T$$

$$=\frac{[\sigma_t]}{2}-\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}$$

$$O_2P=\frac{[\sigma_c]}{2}-\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}$$

$$O_3O_1=O_3O-O_1O=\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}-\frac{[\sigma_t]}{2}$$

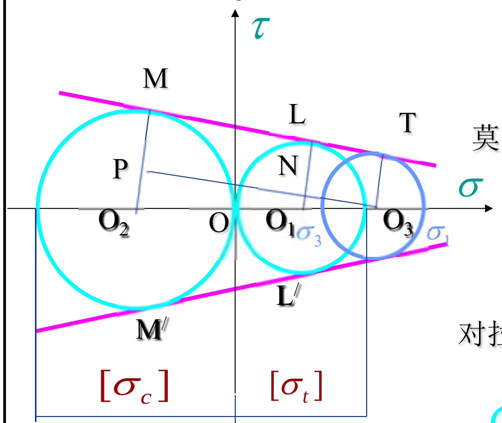
$$O_3O_2=O_3O+OO_2=\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}+\frac{[\sigma_c]}{2}$$

第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

$$\sigma_1-\frac{[\sigma_t]}{[\sigma_c]}\sigma_3=[\sigma_t]$$

莫尔强度理论：

$$\sigma_1-\frac{[\sigma_t]}{[\sigma_c]}\sigma_3\le[\sigma_t]$$



莫尔强度理论的相当应力：

$$\sigma_{rM}=\sigma_1-\frac{[\sigma_t]}{[\sigma_c]}\sigma_3$$

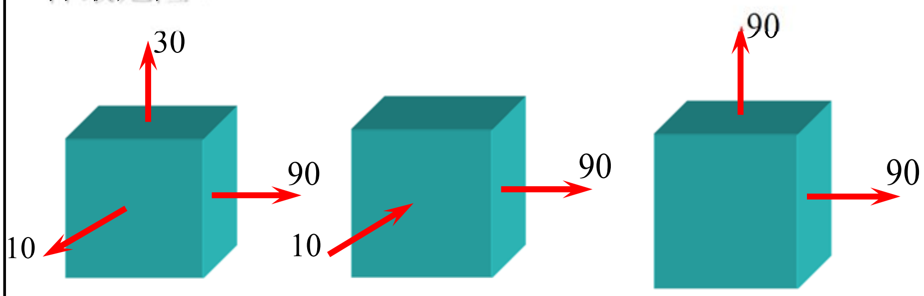
对拉压等强度材料：

$$\sigma_{rM}=\sigma_1-\sigma_3\le[\sigma]$$

NANJING UNIVERSITY

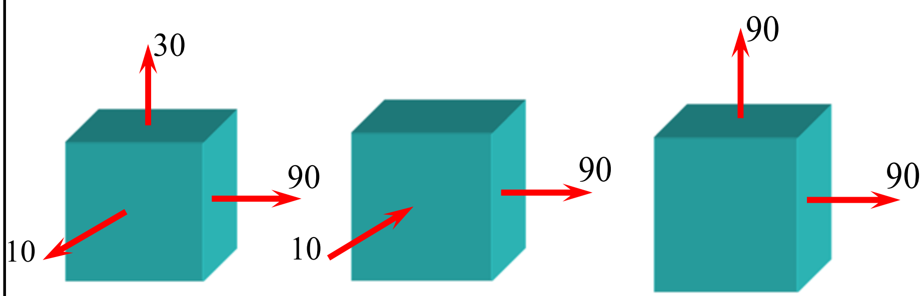
第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

例题：试用第三强度理论分析图示三种应力状态中哪种最危险？



第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

www.slope.com.cn



$\sigma_{r3}=80MPa$ $\sigma_{r3}=100MPa$ $\sigma_{r3}=90MPa$

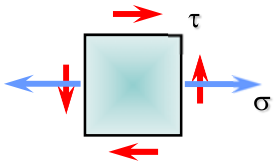
$\Downarrow$

最危险

第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

已知：σ 和τ，试写出第三和第四强度理论的表达式。

解：首先确定主应力



$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$\sigma_2 = 0$

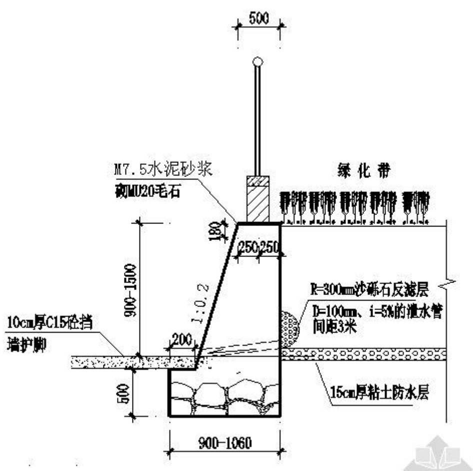
$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

10-6 组合变形

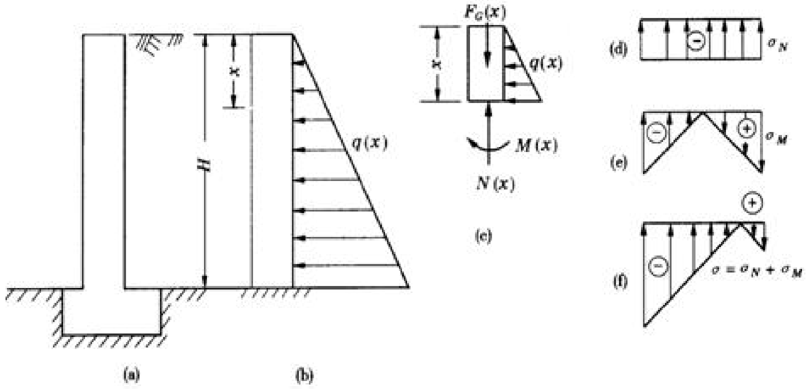
重力式挡土墙是以挡土墙自身重力来维持挡土墙在土压力作用下的稳定。它是我国目前常用的一种挡土墙。重力式挡土墙可用石砌或混凝土建成，一般都做成简单的梯形。



重力式挡土墙断面

第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

重力式挡土墙受力分析



图(b) 为挡土墙的计算简图，其上所受荷载有水平方向的土压力q（x）和垂直方向的自重。土压力使墙产生弯曲变形，自重使墙产生压缩变形。横截面上将有轴力和弯矩两种内力分量，如图（c）所示。

南京大学 NANJING UNIVERSITY

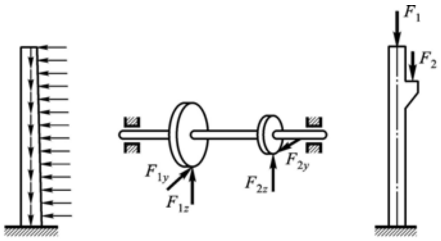
第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

www.slope.com.cn

一、组合变形概念

构件同时发生两种或两种以上的基本变形，如几种变形所对应的应力（或变形）属同一量级，称为组合变形（Combined deformation）

工程实例:
- 烟囱
- 传动轴
- 吊车梁的立柱



烟囱：自重引起轴向压缩 + 水平方向的风力而引起弯曲；
传动轴：在齿轮啮合力的作用下，发生弯曲 + 扭转
立柱：荷载不过轴线，为偏心压缩 = 轴向压缩 + 纯弯曲

第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

二、组合变形的研究方法 —— 叠加原理

求解步骤：

①外力分解和简化

②内力分析——确定危险面。

③应力分析：确定危险面上的应力分布，
建立危险点的强度条件。

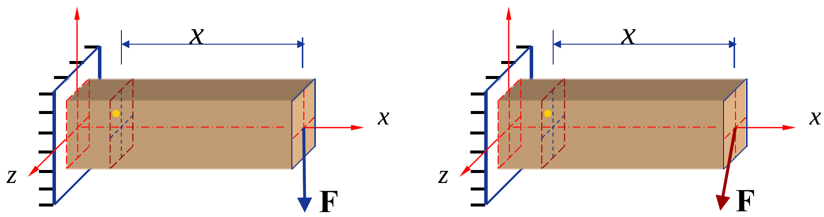
南京大学 NANJING UNIVERSITY

第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

三、两相互垂直平面内的弯曲（斜弯曲）

平面弯曲：横向力通过弯曲中心，与一个形心主惯性轴方向平行, 挠曲线在纵向对称面内。

斜弯曲： 横向力通过弯曲中心，但不与形心主惯性轴平行, 挠曲线不位于外力所在的纵向平面内。



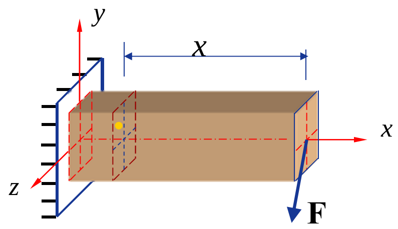
南京大学 NANJING UNIVERSITY

第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

1、斜弯曲的计算

1）荷载的分解

$$F \Rightarrow \begin{array}{l} F_y = F\cos\varphi \\ F_z = F\sin\varphi \end{array}$$



2）任意横截面任意点的“ σ”

（1）内力：

$$M_z(x) = F_y x = F\cos\varphi \times x$$

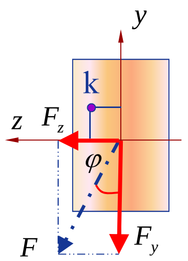
$$M_y(x) = F_z x = F\sin\varphi \times x$$

（2）应力：

$$\sigma_k^{M_z} = \frac{M_z y_k}{I_z}$$

$$\sigma_k^{M_y} = \frac{M_y z_k}{I_y}$$

（应力的 “+”、“−” 由变形判断）

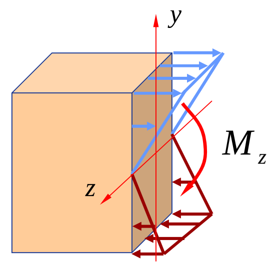


南京大学 NANJING UNIVERSITY

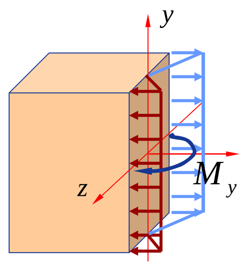
第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

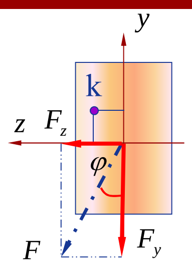
正应力的分布：

在 M_z 作用下：



在 M_y 作用下：



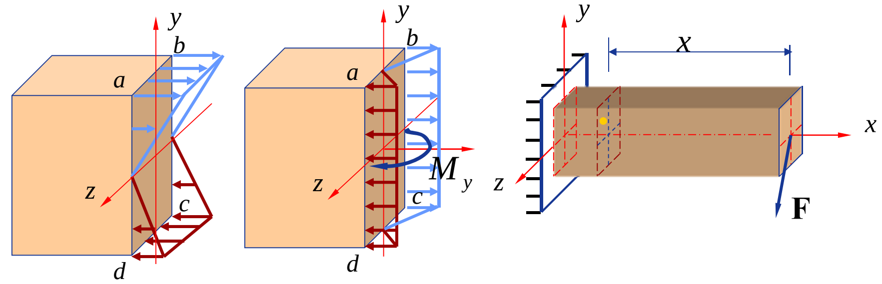


（3）叠加：

$$\sigma_k = \sigma_k^{M_z} + \sigma_k^{M_y} = \frac{M_z y_k}{I_z} + \frac{M_y z_k}{I_y}$$

南京大学 NANJING UNIVERSITY

第10章 应力状态与强度理论及其工程应用



3）强度计算

危险截面——固定端 $M_{z\max}=F_y l,\quad M_{y\max}=F_z l$

危险点——“b”点为最大拉应力点，“d”点为最大压应力点。

$$\sigma_{t\max}=\sigma_{c\max}=\frac{M_{z\max}y_{\max}}{I_z}+\frac{M_{y\max}z_{\max}}{I_y}=\frac{M_{z\max}}{W_z}+\frac{M_{y\max}}{W_y}$$

强度条件（简单应力状态）—— $\sigma_{\max}\le[\sigma]$

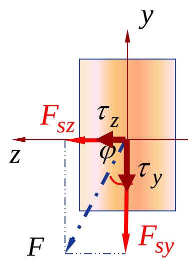
第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

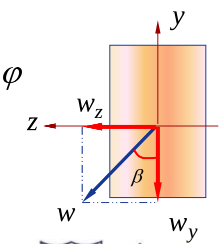
4）刚度计算

$$f_{y\max}=\frac{F_yL^3}{3EI_z},\qquad f_{z\max}=\frac{F_zL^3}{3EI_y}$$

$$f_{\max}=\sqrt{f_y^2+f_z^2}=\sqrt{\left(\frac{F_yL^3}{3EI_z}\right)^2+\left(\frac{F_zL^3}{3EI_y}\right)^2}$$

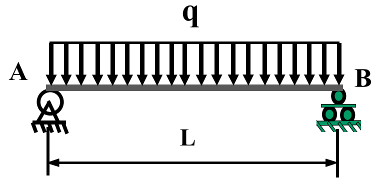
$$f_{\max}\le[f]\qquad \tan\beta=\frac{f_z}{f_y}=\frac{F_z}{I_y}\frac{I_z}{F_y}=\frac{I_z}{I_y}\tan\varphi$$





第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

例：矩形截面木檩条如图，跨长L=3.3m，受集度为q=800N/m的均布力作用，[σ]=12MPa，容许挠度为：L/200，E=9GPa，试校核此梁的强度和刚度。



解：1、外力分解

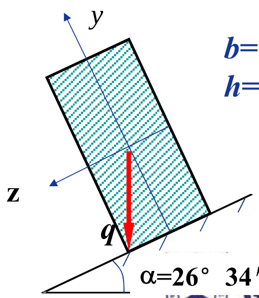
$$q_z = q\sin\alpha = 800\times 0.447 = 358N/m$$

$$q_y = q\cos\alpha = 800\times 0.894 = 714N/m$$

2、强度计算

$$M_{z\max} = \frac{q_y L^2}{8} = \frac{714\times 3.3^2}{8} = 972Nm$$

$$M_{y\max} = \frac{q_z L^2}{8} = \frac{358\times 3.3^2}{8} = 487Nm$$



b=80mm
h=120mm

NANJING UNIVERSITY

第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

www.slope.com.cn

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{972\times 10^3}{\frac{1}{6}\times 80\times 120^2} + \frac{487\times 10^3}{\frac{1}{6}\times 120\times 80^2}$$

$$= 8.86(MPa) \le [\sigma]$$

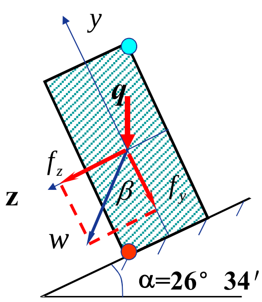
3、刚度计算

$$f_{z\max} = \frac{5q_z L^4}{384EI_y} = \frac{5\times 358\times 10^{-3}}{384\times 9\times 10^3\times \frac{1}{12}120\times 80^3} = 11.99(mm)$$

$$f_{y\max} = \frac{5q_y L^4}{384EI_z} = \frac{5\times 714\times 10^{-3}}{384\times 9\times 10^3\times \frac{1}{12}80\times 120^3} = 10.63(mm)$$

$$f_{\max} = \sqrt{w_{z\max}^2 + w_{y\max}^2} = \sqrt{11.99^2 + 10.63^2} = 16.02(mm)$$

$$f_{\max} = 16.02(mm) < [w] = \frac{3.3\times 10^3}{200} = 16.5(mm)$$



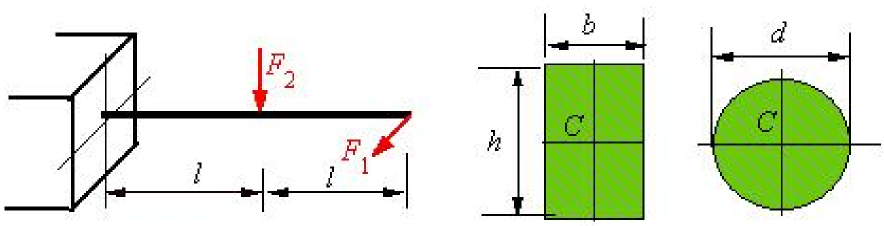
$$\tan\beta = \frac{f_z}{f_y} = \frac{11.99}{10.63}$$

$$\beta = 48.44^\circ$$

NANJING UNIVERSITY

第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

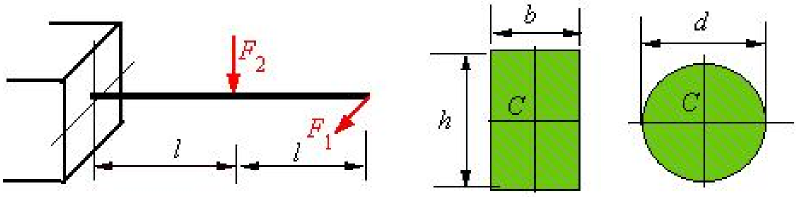
例 图示悬臂梁，承受载荷F_1与F_2作用，已知F_1=800N，F_2=1.6kN，l=1m，许用应力[σ]=160MPa。试分别按下列要求确定截面尺寸：（1）截面为矩形，h=2b；（2）截面为圆形。



第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

www.slope.com.cn

已知F_1=800N，F_2=1.6kN，l=1m，[σ]=160MPa。



解：（1）矩形截面

$$\sigma_{\max} = \frac{F_1 2l}{\frac{hb^2}{6}} + \frac{F_2 l}{\frac{bh^2}{6}} = [\sigma] \quad 即 \quad \frac{800\times 2}{\frac{2b^3}{6}} + \frac{1600\times 1}{\frac{4b^3}{6}} = 160\times 10^6$$

$$b = 35.6\ \text{mm}, \qquad h = 2b = 71.2\ \text{mm}$$

（2）圆截面

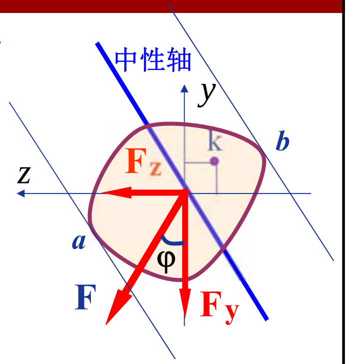
$$\sigma_{\max} = \frac{\sqrt{(F_1 2l)^2 + (F_2 l)^2}}{\frac{\pi d^3}{32}} = [\sigma] \quad 即 \quad \frac{\sqrt{(800\times 2)^2 + (1600\times 1)^2}}{\frac{\pi d^3}{32}} = 160\times 10^6$$

$$d = 52.4\ \text{mm}$$

第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

对于无棱角的截面如何进行强度计算——

1、首先确定中性轴的位置；



$$\sigma_k = \sigma_k^{M_z} + \sigma_k^{M_y} = \frac{M_z y_k}{I_z} + \frac{M_y z_k}{I_y}$$

令 z_0、y_0 代表中性轴上任意点的坐标

$$\sigma = \frac{M_z y_0}{I_z} + \frac{M_y z_0}{I_y} = 0$$ ——中性轴方程（过截面形心的一条斜直线）

2、找出危险点的位置（离中性轴最远的点）；

3、最后进行强度计算。

南京大学 NANJING UNIVERSITY

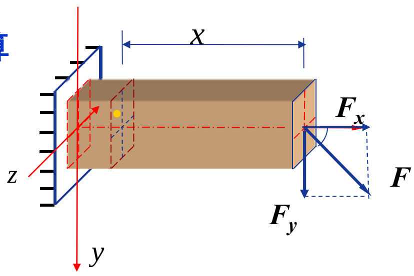
第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

四、拉伸(压缩)与弯曲

（一）拉(压)弯组合变形的计算

1、荷载的分解

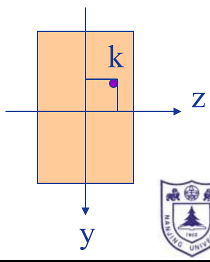
$$F \Rightarrow \begin{aligned} F_x &= F\cos\varphi \\ F_y &= F\sin\varphi \end{aligned}$$



2、任意横截面任意点的“σ”

（1）内力：
$$F_N(x) = F_x = F\cos\varphi$$
$$M_z(x) = F_y x = F\sin\varphi \times x$$

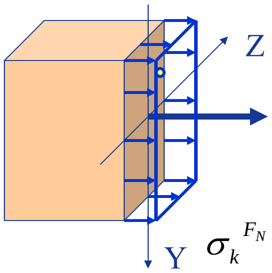
（2）应力：
$$\sigma_k^{F_N} = \frac{F_N(x)}{A}$$
$$\sigma_k^{M_z} = \frac{M_z(x) y_k}{I_z}$$



南京大学 NANJING UNIVERSITY

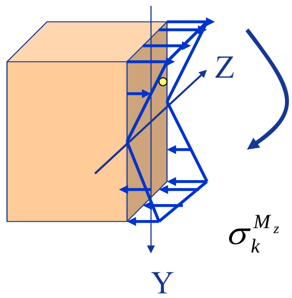
第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

在 F_N 作用下：



$$\sigma_k^{F_N} = \frac{F_N(x)}{A}$$

在 M_z 作用下：

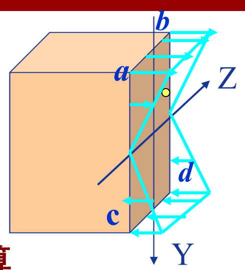


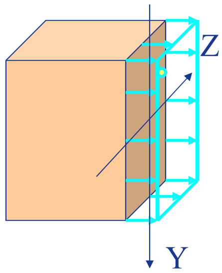
$$\sigma_k^{M_z} = \frac{M_z(x)y_k}{I_z}$$

（3）正应力的叠加：

$$\sigma_k = \sigma_k^{F_N} + \sigma_k^{M_z}$$

第10章 应力状态与强度理论及其工程应用





3、强度计算

危险截面——固定端 $F_N = F\cos\varphi$ $M_{z\max} = F\sin\varphi \times l$

危险点——“*ab*”边各点有最大的拉应力，

“*cd*”边各点有最大的压应力（或最小拉应力）。

$$\sigma^t{}_{\max} = \frac{M_{z\max}}{W_z} + \frac{F_N}{A} \qquad \sigma^c{}_{\max} = -\frac{M_{z\max}}{W_z} + \frac{F_N}{A}$$

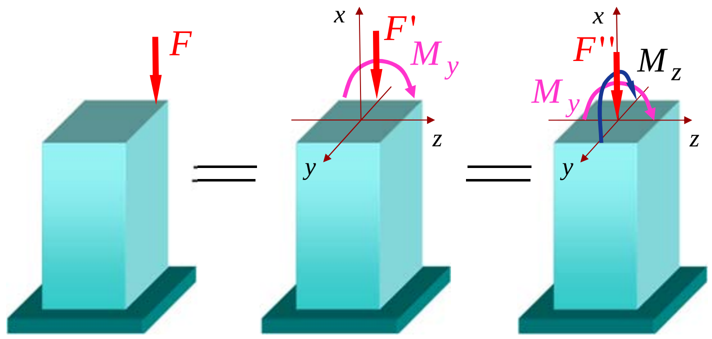
强度条件（简单应力状态）—— $\sigma_{\max} \le [\sigma]$

第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

（二）偏心拉(压)

1、偏心拉(压)的概念

作用在杆件上的外力与杆的轴线平行但不重合。



第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

www.slope.com.cn

2、偏心拉(压)的计算

（1）荷载的简化

$$F \Rightarrow \begin{cases} F' \\ M_y = F \cdot e_z \\ M_z = F \cdot e_y \end{cases}$$

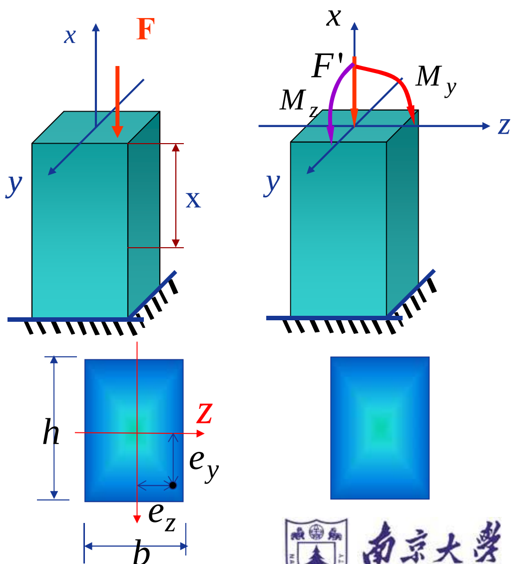
（2）任意横截面任意点的“σ”

（a）内力：

$$F_N(x) = F$$

$$M_z(x) = F \cdot e_y$$

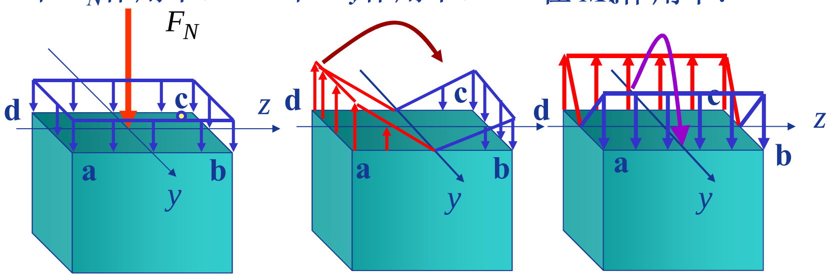
$$M_y(x) = F \cdot e_z$$



第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

正应力的分布——

在F_N作用下：　　在M_y作用下：　　在 M_z作用下：



（3）正应力的叠加：

$$\sigma_k=\sigma_k^{F_N}+\sigma_k^{M_z}+\sigma_k^{M_y}=-\frac{F}{A}-\frac{M_z y_k}{I_z}-\frac{M_y z_k}{I_y}$$

南京大学 NANJING UNIVERSITY

第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

$$\sigma_k=\sigma_k^{F_N}+\sigma_k^{M_z}+\sigma_k^{M_y}=-\frac{F}{A}-\frac{M_z y_k}{I_z}-\frac{M_y z_k}{I_y}$$

3、强度计算

危险截面——各截面

危险点——“d”点有最大的拉应力，
“b”点有最大的压应力。

$$\sigma_{\max}^t=-\frac{F}{A}+\frac{M_{z\max}y_{\max}}{I_z}+\frac{M_{y\max}z_{\max}}{I_y}=-\frac{F}{A}+\frac{M_{z\max}}{W_z}+\frac{M_{y\max}}{W_y}$$

$$\sigma_{\max}^c=\frac{F}{A}+\frac{M_{z\max}y_{\max}}{I_z}+\frac{M_{y\max}z_{\max}}{I_y}=\frac{F}{A}+\frac{M_{z\max}}{W_z}+\frac{M_{y\max}}{W_y}$$

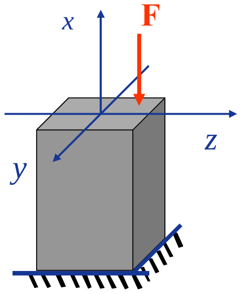
强度条件（简单应力状态）——　$\sigma_{\max}\le[\sigma]$

南京大学 NANJING UNIVERSITY

第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

对有棱角的截面，最大的正应力发生在棱角点处，且处于单向应力状态。

$$\sigma_{\max}=\pm\frac{N}{A}\pm\frac{M_{z\max}}{W_z}\pm\frac{M_{y\max}}{W_y}\le[\sigma]$$

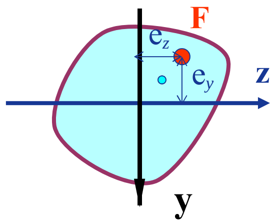


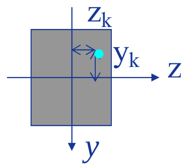
对于无棱角的截面如何进行强度计算——

1、确定中性轴的位置；

$$M_z=F\cdot e_y$$

$$M_y=F\cdot e_z$$





南京大学 NANJING UNIVERSITY

第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

$$\sigma_k=\sigma_k^{F_N}+\sigma_k^{M_z}+\sigma_k^{M_y}=-\frac{F}{A}-\frac{M_z y_k}{I_z}-\frac{M_y z_k}{I_y}$$

$$M_z=F\cdot e_y$$

$$M_y=F\cdot e_z$$

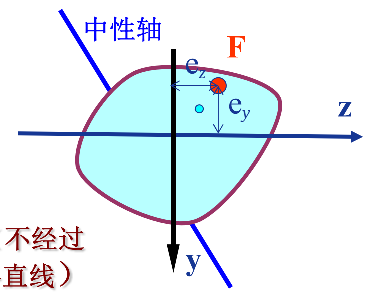
令 z_0、y_0 代表中性轴上任意点的坐标

$$\sigma=-\frac{F}{A}-\frac{M_z y_0}{I_z}-\frac{M_y z_0}{I_y}=0\Rightarrow$$

$$\frac{F}{A}+\frac{F\cdot e_y\cdot y_0}{I_z}+\frac{F\cdot e_z\cdot z_0}{I_y}=0\ \Rightarrow$$

$$1+\frac{e_y\cdot y_0}{i_z^2}+\frac{e_z\cdot z_0}{i_y^2}=0$$

——中性轴方程（不经过截面形心的一条斜直线）



设中性轴在 *z*, *y* 轴的截距为 a_y, a_z 则:

$$I_z=A\cdot i_z^2$$

$$I_y=A\cdot i_y^2$$

$$a_y=-\frac{i_z^2}{e_y};\qquad a_z=-\frac{i_y^2}{e_z}$$

南京大学 NANJING UNIVERSITY

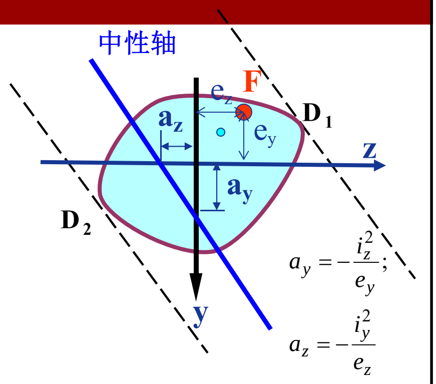
第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

www.slope.com.cn

2、确定危险点的位置

3、强度计算

将两切点的坐标代入应力计算公式确定最大拉应力和最大压应力进行强度计算。



（1）中性轴不过截面形心，与外力无关，与偏心距及截面形状、尺寸有关；
（2）中性轴的截距与偏心距符号相反，表明外力作用点与中性轴分别在截面形心的相对两侧；
（3）外力作用点越是向形心靠拢，中性轴离形心越远，甚至移到截面外面。当中性轴移到与截面相切或截面以外时，截面上则只存在压应力或拉应力；

NANJING UNIVERSITY

第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

www.slope.com.cn

（三）截面核心

轴向力不偏心时，横截面均匀受拉（压），无异号正应力。在偏心拉（压）时，横截面可能出现异号正应力。

1. 截面核心的概念：

在横截面上存在一个包围形心的区域，当轴向力的作用点在此区域内，横截面上不会出现异号正应力，此区域即为**截面核心**。

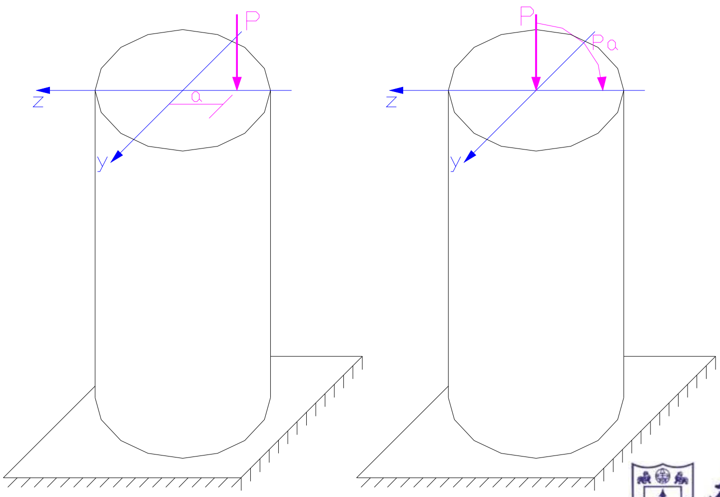
2. 确定截面核心的思路：

1、在截面的边缘处做与截面相切的中性轴，并确定中性轴的截距；
2、由中性轴的截距，计算外力作用点的坐标；
3、最后连接力作用点得到一个在截面形心附近的区域 ——截面核心。

南京大学 NANJING UNIVERSITY

第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

例 圆截面杆的截面核心



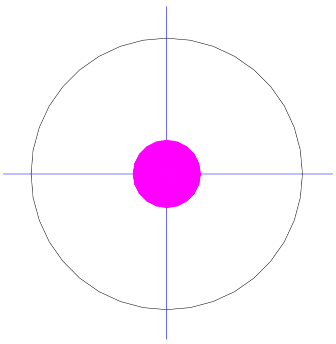
第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

www.slope.com.cn

$$N = -P \quad , \qquad M = Pa$$

$$\sigma_t = \frac{N}{A} + \frac{M}{W} = -\frac{P}{\frac{\pi d^2}{4}} + \frac{Pa}{\frac{\pi d^3}{32}} = 0$$

$$a = \frac{d}{8}$$



南京大學 NANJING UNIVERSITY

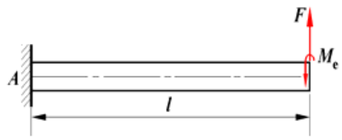
第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

五、扭转与弯曲

（一）弯扭组合

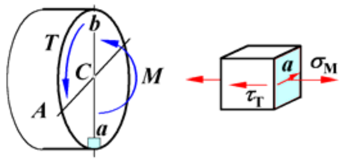
危险截面—截面A

危险点— a 与 b



$$\sigma_M = \frac{M}{W}$$

$$\tau_T = \frac{T}{W_p} = \frac{T}{2W}$$



应力状态—单向＋纯剪切

强度条件（塑性材料，圆截面）

$$\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma_M^2 + 4\tau_T^2} \le [\sigma] \qquad \sigma_{r4} = \sqrt{\sigma_M^2 + 3\tau_T^2} \le [\sigma]$$

$$\sigma_{r3} = \frac{\sqrt{M^2 + T^2}}{W} \le [\sigma] \qquad \sigma_{r4} = \frac{\sqrt{M^2 + 0.75T^2}}{W} \le [\sigma]$$

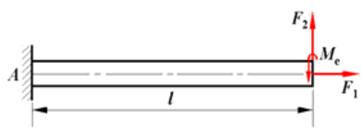
南京大学 NANJING UNIVERSITY

第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

（二）弯拉扭组合

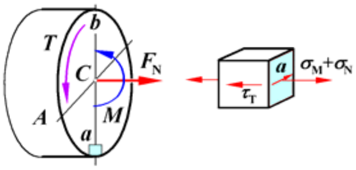
危险截面—截面A

危 险 点— a



$$\sigma_a = \sigma_M + \sigma_N = \frac{M}{W} + \frac{F_N}{A}$$

$$\tau_a = \tau_T = \frac{T}{W_p} = \frac{T}{2W}$$



应力状态—单向＋纯剪切

强度条件（塑性材料）

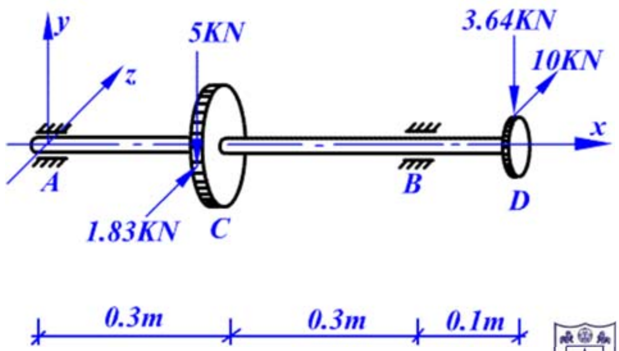
$$\sigma_{r3} = \sqrt{(\sigma_M + \sigma_N)^2 + 4\tau_T^2} \le [\sigma]$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{(\sigma_M + \sigma_N)^2 + 3\tau_T^2} \le [\sigma]$$

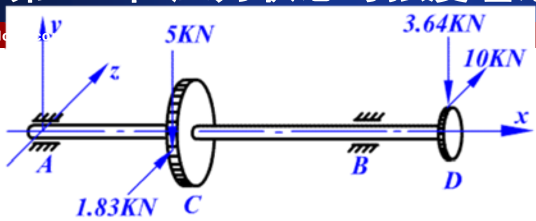
南京大学 NANJING UNIVERSITY

第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

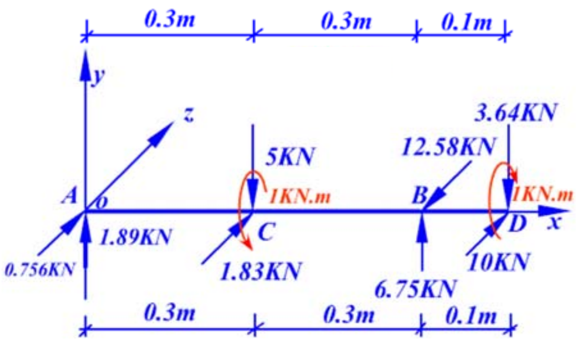
例 图示钢制实心圆轴，其齿轮*C*上作用铅直切向力5*KN*，径向力1.82*KN*；齿轮*D*上作用有水平切向力10*KN*，径向力3.64*KN*。齿轮C的直径d_C=400*mm*，齿轮*D*的直径d_D=200*mm*。圆轴的容许应力$[\sigma]=100MPa$。试按第四强度理论求轴的直径。



第10章 应力状态与强度理论及其工程应用



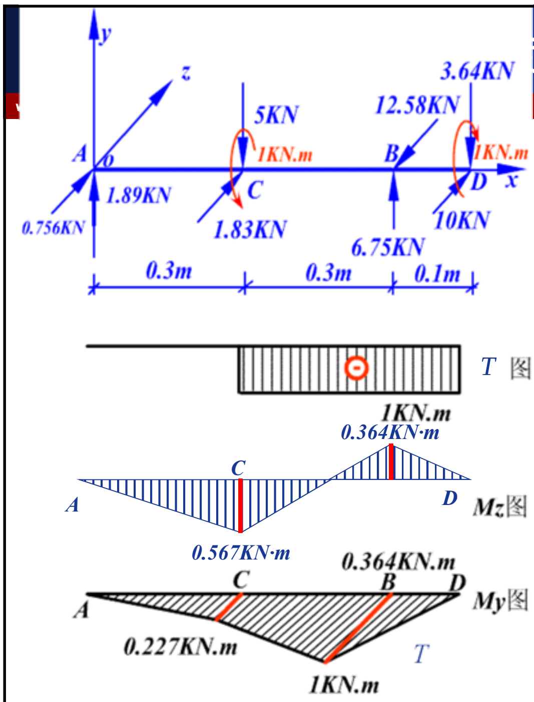
解（一）外力分析



受力简图

将各力向圆轴的截面形心简化，画出受力简图。

理论及其工程应用



（二）内力分析

画出内力图如图

从内力图分析，***B***截面为危险截面。***B***截面上的内力：

第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

（三）按第四强度理论求轴所需直径

由第四强度理论公式

$$\sigma_{r4}=\frac{1}{W}\sqrt{M^2+0.75T^2}\le[\sigma]$$

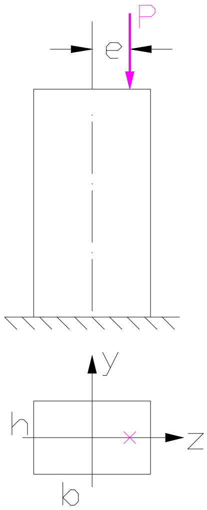
可得：

$$\frac{\pi d^3}{32}=W\ge\frac{\sqrt{M^2+0.75T^2}}{[\sigma]}$$

解出：***d*=5.19*mm***

第10章 应力状态与强度理论及其工程应用

例：图示偏心受压杆。试求该杆中不出现拉应力时的最大偏心距。



解： $N = -P, \quad M = Pe$

$$\sigma_t = \frac{N}{A} + \frac{M}{W} = -\frac{P}{bh} + \frac{Pe}{\frac{hb^2}{6}} = 0$$

$$e = \frac{b}{6}$$

南京大学 NANJING UNIVERSITY