

 **南京大学**



Engineering Mechanics 工程力学

朱鸿鹄
南京大学地球科学与工程学院

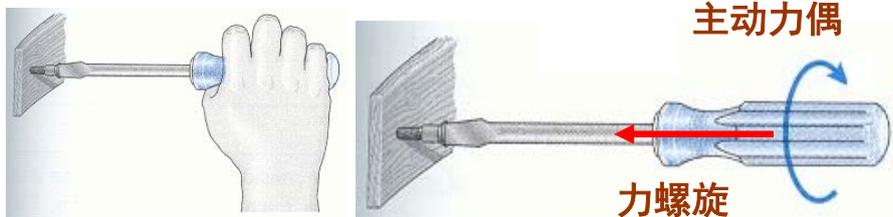
www.slope.com.cn

第7章 圆轴扭转时的应力变形分析以及强度和刚度设计

www.slope.com.cn

生活中的扭转(Torsion)

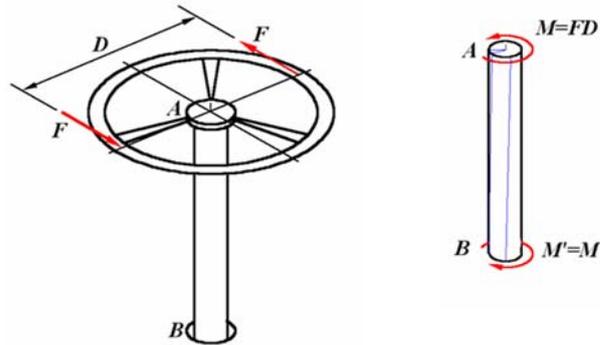
螺丝刀



第7章 圆轴扭转时的应力变形分析以及强度和刚度设计

www.slope.com.cn

汽车方向盘上的外力偶



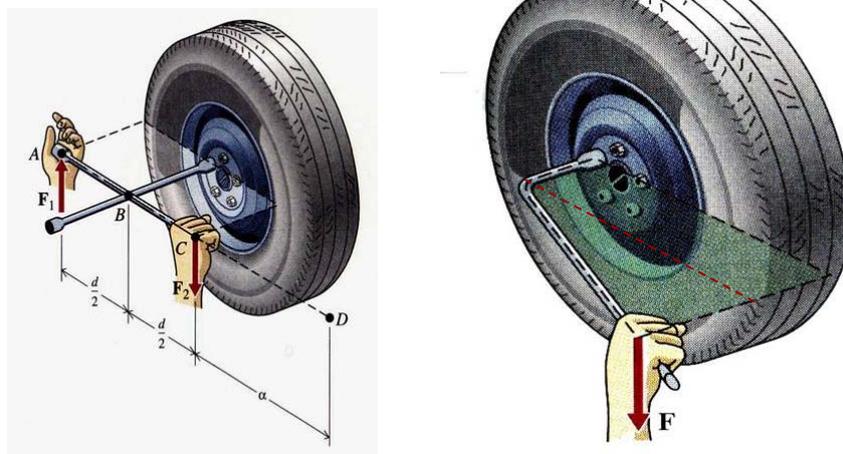
受力特点：杆两端作用着大小相等、方向相反的力偶，且力偶作用面垂直于杆的轴线。

NANJING UNIVERSITY

第7章 圆轴扭转时的应力变形分析以及强度和刚度设计

www.slope.com.cn

装卸轮胎时施加的外力偶



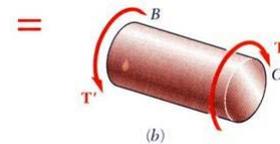
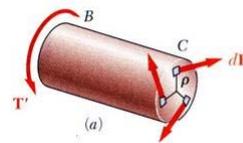
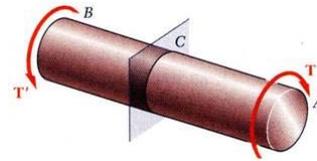
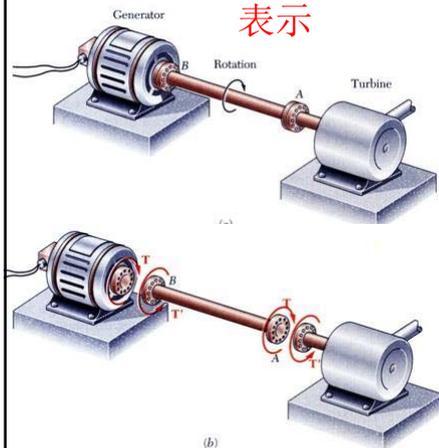
NANJING UNIVERSITY

第7章 圆轴扭转时的应力变形分析以及强度和刚度设计

www.slope.com.cn

传动轴

扭矩 (Torque): 使物体发生转动的力矩, 等于力和力臂的乘积, 用 T 表示

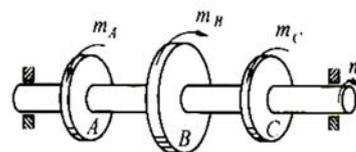


 NANJING UNIVERSITY

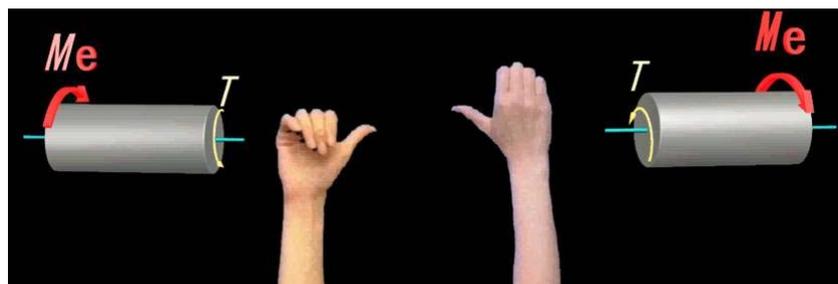
第7章 圆轴扭转时的应力变形分析以及强度和刚度设计

www.slope.com.cn

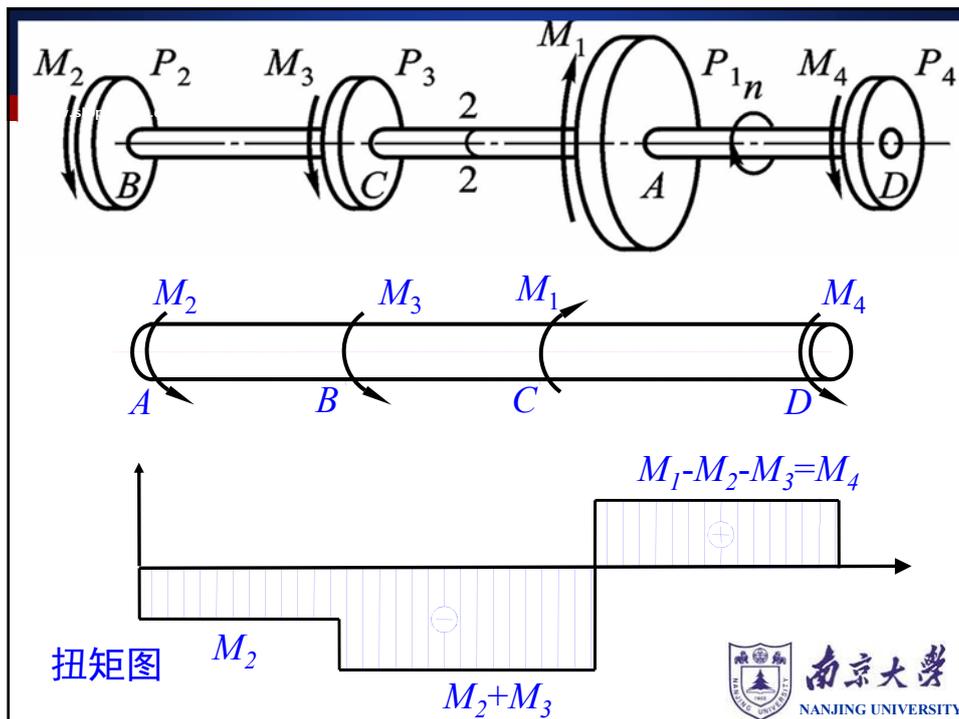
扭矩的大小可利用截面法来确定: $T = M_e$



扭矩 T 的符号规定和外力矩 M_e 一样: 按右手螺旋法则判断



 UNIVERSITY



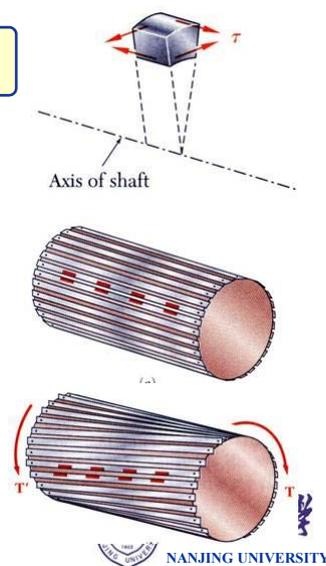
第7章 圆轴扭转时的应力变形分析以及强度和刚度设计

www.slope.com.cn

7.1 圆轴扭转时的应力和变形

1. 平面假设和变形规律

假设圆轴受扭时其横截面只产生绕轴线的转动变形

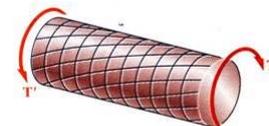
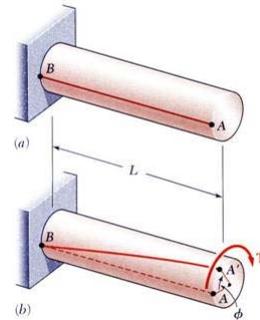


第7章 圆轴扭转时的应力变形分析以及强度和刚度设计

www.slope.com.cn

剪应变 $\gamma_\rho = \rho \frac{d\varphi}{dx}$ φ 为扭转角

单位扭转角 $\theta = \frac{\gamma_\rho}{\rho} = \frac{d\varphi}{dx}$



第7章 圆轴扭转时的应力变形分析以及强度和刚度设计

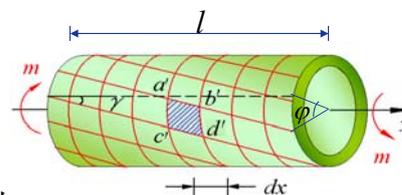
www.slope.com.cn

2. 剪切虎克定律和剪(切)应力变化规律

在弹性范围内剪应力
与剪应变成正比关系

剪应力 $\tau = G\gamma$ $\tau < \tau_p$ 时

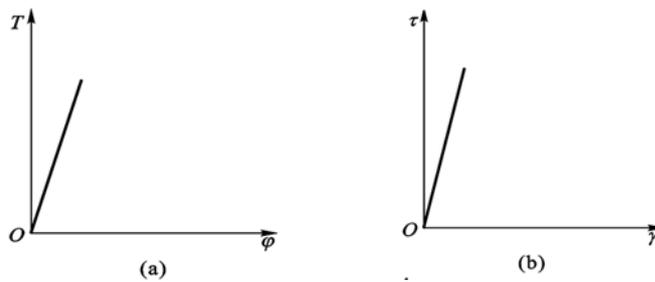
剪切模量 $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$



第7章 圆轴扭转时的应力变形分析以及强度和刚度设计

www.slope.com.cn

薄壁圆筒的扭转试验



扭转引起的剪应力

$$\tau_{\rho} = G\gamma_{\rho} = G\rho \frac{d\varphi}{dx}$$



第7章 圆轴扭转时的应力变形分析以及强度和刚度设计

www.slope.com.cn

3. 静力关系和应力应变公式

截面上的扭矩=剪应力组成的力偶

$$T = \int_A \rho \tau_{\rho} dA = G \frac{d\varphi}{dx} \int_A \rho^2 dA$$

定义极惯性矩

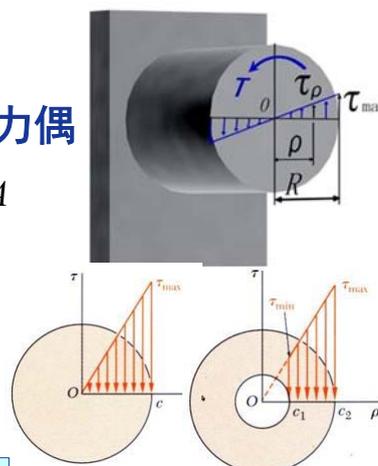
$$I_p = \int_A \rho^2 dA$$

所以

$$T = GI_p \frac{d\varphi}{dx}$$

切应力公式

$$\tau_{\rho} = G\rho \frac{d\varphi}{dx} = \frac{T\rho}{I_p}$$



第7章 圆轴扭转时的应力变形分析以及强度和刚度设计

www.slope.com.cn

扭转变形与内力计算式

单位长度转角 $\theta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{T}{GI_p}$ GI_p - 抗扭刚度

rad/m —— 单位

对于轴向拉压杆
单位长度的位移 $\frac{\Delta l}{l} = \frac{N}{EA}$ EA - 抗拉刚度

对于梁的弯曲问题也有类似的公式



第7章 圆轴扭转时的应力变形分析以及强度和刚度设计

www.slope.com.cn

轴两端面间的相对转角 $\varphi = \int_L \frac{T}{GI_p} dx$

转角单位：弧度 (rad)

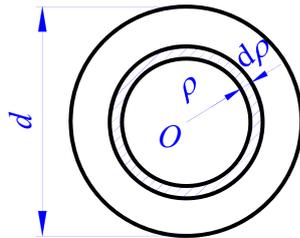
扭矩不变的等直轴 $\varphi = \frac{Tl}{GI_p}$

各段扭矩为不同值的阶梯轴 $\varphi = \sum \frac{T_i l_i}{GI_{pi}}$



第7章 圆轴扭转时的应力变形分析以及强度和刚度设计

www.slope.com.cn

实心圆截面的极惯性矩 I_p 和抗扭截面系数 W_p 

$$dA = 2\pi\rho d\rho$$

极惯性矩 I_p

$$\begin{aligned} I_p &= \int_A \rho^2 dA = \int_0^{\frac{d}{2}} \rho^2 (2\pi\rho d\rho) \\ &= 2\pi \left(\frac{\rho^4}{4} \right) \Big|_0^{\frac{d}{2}} = \frac{\pi d^4}{32} \end{aligned}$$

抗扭截面系数 W_p

$$W_p = \frac{I_p}{d/2} = \frac{\pi d^3}{16}$$

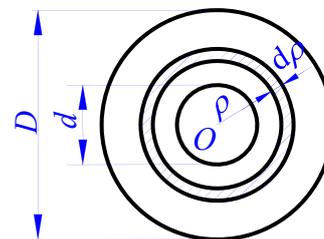


第7章 圆轴扭转时的应力变形分析以及强度和刚度设计

www.slope.com.cn

空心圆截面的极惯性矩 I_p 和抗扭截面系数 W_p

$$\begin{aligned} I_p &= \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} 2\pi\rho^3 d\rho = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4) \\ &= \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4) \quad \alpha = \frac{d}{D} \end{aligned}$$



$$dA = 2\pi\rho d\rho$$

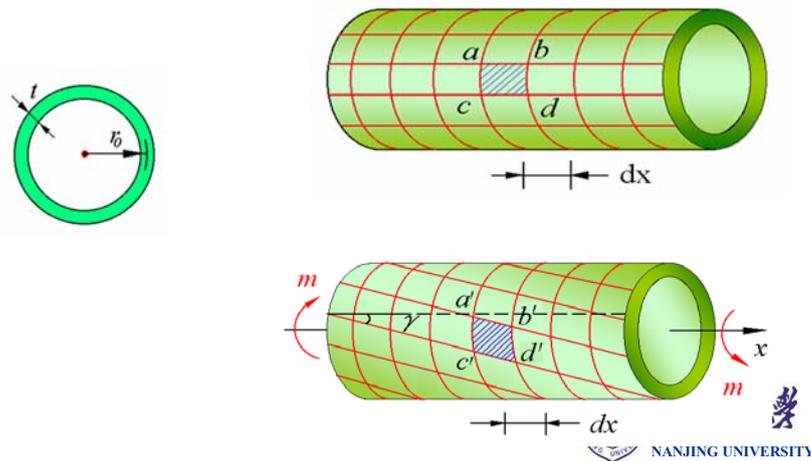
$$W_p = \frac{I_p}{D/2} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D} = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4)$$



第7章 圆轴扭转时的应力变形分析以及强度和刚度设计

www.slope.com.cn

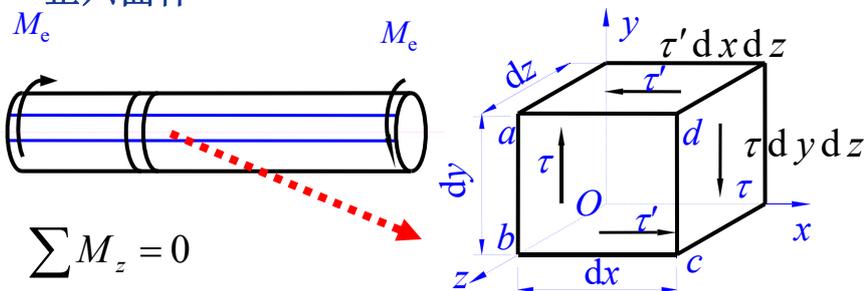
4. 纯剪切单元体和剪应力互等定理



第7章 圆轴扭转时的应力变形分析以及强度和刚度设计

www.slope.com.cn

单元体——从受扭的薄壁圆筒表面处截取一微小的正六面体



$$\sum M_z = 0$$

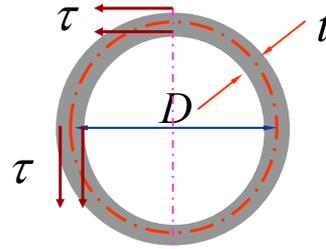
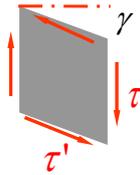
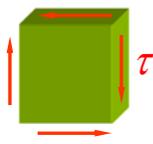
$$(\tau dy dz) dx = (\tau' dx dz) dy$$

得 $\tau' = \tau$

第7章 圆轴扭转时的应力变形分析以及强度和刚度设计

www.slope.com.cn

剪应力互等定理 在相互垂直的两个面上，剪应力总是成对出现，并且大小相等，方向同时指向或同时背离两个面的交线



剪应力互等定理
 南京大学
 NANJING UNIVERSITY

第7章 圆轴扭转时的应力变形分析以及强度和刚度设计

www.slope.com.cn

7.2 圆轴扭转的强度和刚度计算

1. 强度计算

等截面圆轴：
$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_p}$$

(1) 强度条件：
$$\tau_{\max} \leq [\tau]$$

(2) 强度条件应用

变截面圆轴：
$$\tau_{\max} = \left(\frac{T}{W_p} \right)_{\max}$$

• 校核强度：
$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_p} \leq [\tau]$$

• 设计截面尺寸：
$$W_p \geq \frac{T_{\max}}{[\tau]}$$

• 确定外荷载：
$$T_{\max} \leq W_p \cdot [\tau]$$

$$W_p = \begin{cases} \frac{\pi D^3}{16} & \text{实心,} \\ \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4) & \text{空心.} \end{cases}$$

 南京大学
 NANJING UNIVERSITY

第7章 圆轴扭转时的应力变形分析以及强度和刚度设计

www.slope.com.cn

例 已知 $T=1.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $[\tau] = 50 \text{ MPa}$, 试根据强度条件设计实心圆轴与 $\alpha = 0.9$ 的空心圆轴。

解：1. 确定实心圆轴直径

$$\tau_{\max} \leq [\tau] \quad \tau_{\max} = \frac{T}{\frac{\pi d^3}{16}}$$

$$\frac{T}{\frac{\pi d^3}{16}} \leq [\tau]$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16T}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16(1.5 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m})}{\pi(50 \times 10^6 \text{ Pa})}} = 0.0535 \text{ m}$$

取： $d = 54 \text{ mm}$



第7章 圆轴扭转时的应力变形分析以及强度和刚度设计

www.slope.com.cn

2. 确定空心圆轴内、外径

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16}(1-\alpha^4) \quad \frac{16T}{\frac{\pi}{16}D^3(1-\alpha^4)} \leq [\tau]$$

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16T}{\pi(1-\alpha^4)[\tau]}} = 76.3 \text{ mm} \quad d = \alpha D = 68.7 \text{ mm}$$

取： $D = 76 \text{ mm}$, $d = 68 \text{ mm}$

3. 重量比较

$$\beta = \frac{\frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)}{\frac{\pi}{4}d^2} = 39.5\%$$

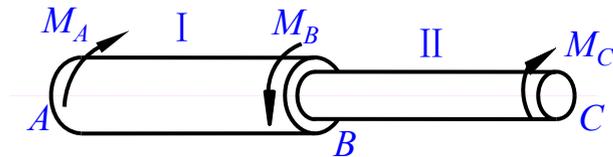
空心轴远比实心轴轻



第7章 圆轴扭转时的应力变形分析以及强度和刚度设计

www.slope.com.cn

例 图示阶梯状圆轴，AB段直径 $d_1=120\text{mm}$ ，BC段直径 $d_2=100\text{mm}$ 。扭转力偶矩 $M_A=22\text{ kN}\cdot\text{m}$ ， $M_B=36\text{ kN}\cdot\text{m}$ ， $M_C=14\text{ kN}\cdot\text{m}$ 。材料的许用切应力 $[\tau]=80\text{MPa}$ ，试校核该轴的强度。



解： 1、求内力，作出轴的扭矩图



第7章 圆轴扭转时的应力变形分析以及强度和刚度设计

www.slope.com.cn

2、计算轴横截面上的最大切应力并校核强度



$$\text{AB段 } \tau_{1,\max} = \frac{T_1}{W_{p1}} = \frac{22 \times 10^6 \text{ N}\cdot\text{mm}}{\frac{\pi}{16}(120\text{mm})^3} = 64.8\text{MPa} \quad 14$$

$$\text{BC段 } \tau_{2,\max} = \frac{T_2}{W_{p2}} = \frac{14 \times 10^6 \text{ N}\cdot\text{mm}}{\frac{\pi}{16}(100\text{mm})^3} = 71.3\text{MPa} < [\tau] = 80\text{MPa}$$

即该轴满足强度条件



第7章 圆轴扭转时的应力变形分析以及强度和刚度设计

www.slope.com.cn

2. 刚度计算

刚度条件:

$$\theta_{\max} = \frac{T_{\max}}{GI_p} \leq [\theta] \quad \theta_{\max} = \frac{T_{\max}}{GI_p} \times \frac{180^\circ}{\pi} \leq [\theta] \quad \text{°/m}$$

刚度条件应用:

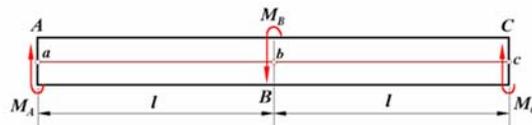
- 1) 校核刚度: $\theta_{\max} \leq [\theta]$
- 2) 设计截面尺寸: $I_p \geq \frac{|T|_{\max}}{G[\theta]}$
- 3) 确定外荷载: $T_{\max} \leq GI_p \cdot [\theta]$



第7章 圆轴扭转时的应力变形分析以及强度和刚度设计

www.slope.com.cn

例 已知: $M_A = 180 \text{ N}\cdot\text{m}$, $M_B = 320 \text{ N}\cdot\text{m}$, $M_C = 140 \text{ N}\cdot\text{m}$,
 $I_p = 3 \times 10^5 \text{ mm}^4$, $l = 2 \text{ m}$, $G = 80 \text{ GPa}$, $[\theta] = 0.5 \text{ (}^\circ\text{)/m}$ 。
 $\varphi_{AC} = ?$ 校核轴的刚度



解: 1. 变形分析 (注意扭转方向)

$$T_1 = M_A = 180 \text{ N}\cdot\text{m} \quad \varphi_{AB} = \frac{T_1 l}{GI_p} = 1.50 \times 10^{-2} \text{ rad}$$

$$T_2 = -M_C = -140 \text{ N}\cdot\text{m} \quad \varphi_{BC} = \frac{T_2 l}{GI_p} = -1.17 \times 10^{-2} \text{ rad}$$

$$\varphi_{AC} = \varphi_{AB} + \varphi_{BC} = 1.50 \times 10^{-2} - 1.17 \times 10^{-2} = 0.33 \times 10^{-2} \text{ rad}$$



第7章 圆轴扭转时的应力变形分析以及强度和刚度设计

www.slope.com.cn

2. 刚度校核

$$\theta_1 = \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)_1 = \frac{T_1}{GI_p} \quad \theta_2 = \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)_2 = \frac{T_2}{GI_p} \quad \text{因 } |T_1| > |T_2|$$

$$\text{故 } \theta_{\max} = \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)_{\max} = \theta_1 = \frac{T_1}{GI_p}$$

$$\theta_{\max} = \frac{180 \text{ N} \cdot \text{m}}{(80 \times 10^9 \text{ Pa})(3.0 \times 10^5 \times 10^{-12} \text{ m}^4)} \frac{180}{\pi} = 0.43 (^\circ) / \text{m} < [\theta]$$

轴的刚度足够

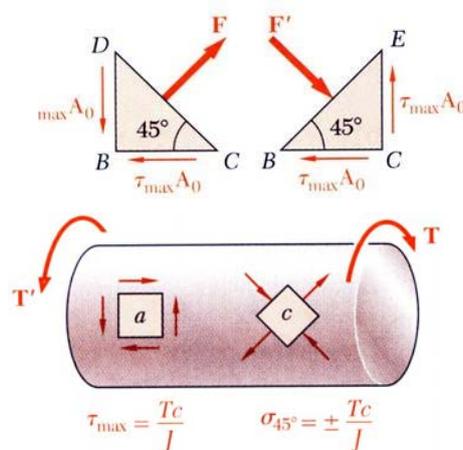


第7章 圆轴扭转时的应力变形分析以及强度和刚度设计

www.slope.com.cn

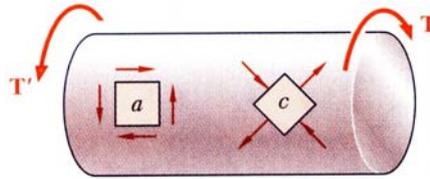
3. 受扭圆杆的破坏现象

应力状态



第7章 圆轴扭转时的应力变形分析以及强度和刚度设计

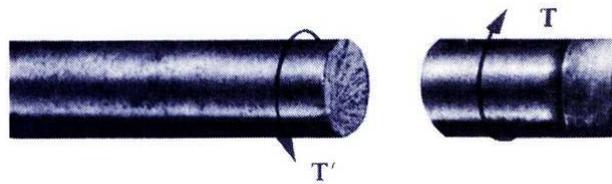
www.slope.com.cn



$$\tau_{\max} = \frac{Tc}{J} \quad \sigma_{45^\circ} = \pm \frac{Tc}{J}$$

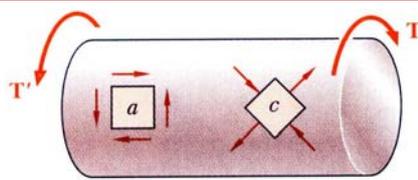
塑性材料（低碳钢）-剪切破坏

材料抗剪切能力差，构件沿横截面因剪应力而破坏



第7章 圆轴扭转时的应力变形分析以及强度和刚度设计

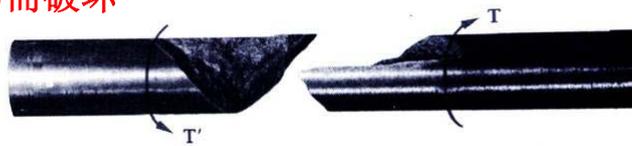
www.slope.com.cn



$$\tau_{\max} = \frac{Tc}{J} \quad \sigma_{45^\circ} = \pm \frac{Tc}{J}$$

脆性材料（铸铁）-拉伸破坏

材料抗拉能力差，构件沿沿45度倾角的螺旋形曲面因拉应力而破坏

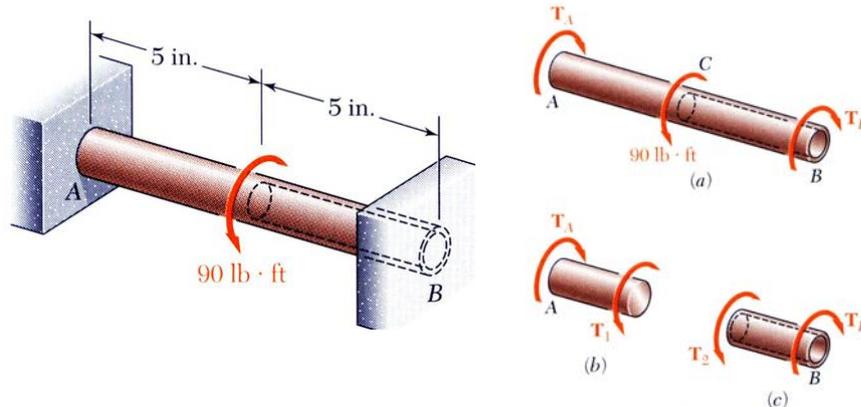


第7章 圆轴扭转时的应力变形分析以及强度和刚度设计

www.slope.com.cn

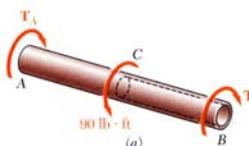
7.3 扭转的超静定问题

方法：根据变形协调条件建立补充方程



第7章 圆轴扭转时的应力变形分析以及强度和刚度设计

www.slope.com.cn



补充方程 $\phi = \phi_1 + \phi_2 = \frac{T_A L_1}{J_1 G} - \frac{T_B L_2}{J_2 G} = 0$

$$T_A + T_B = 90 \text{ lb} \cdot \text{ft}$$



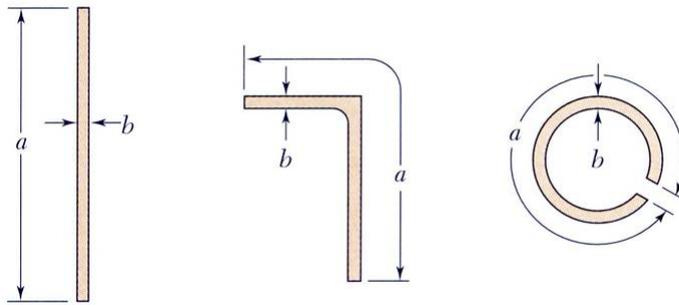
$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = \frac{T_A L_1}{J_1 G} - \frac{T_B L_2}{J_2 G} = 0 \quad T_B = \frac{L_1 J_2}{L_2 J_1} T_A$$

$$T_A + \frac{L_1 J_2}{L_2 J_1} T_A = 90 \text{ lb} \cdot \text{ft}$$

第7章 圆轴扭转时的应力变形分析以及强度和刚度设计

www.slope.com.cn

3.4 非圆截面杆在纯扭转时的应力和变形



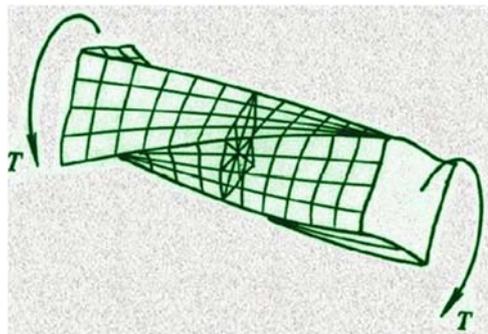
第7章 圆轴扭转时的应力变形分析以及强度和刚度设计

www.slope.com.cn

1. 矩形截面杆

圆杆扭转时—横截面保持为平面

非圆杆扭转时—横截面由平面变为曲面（发生翘曲）



第7章 圆轴扭转时的应力变形分析以及强度和刚度设计

www.slope.com.cn

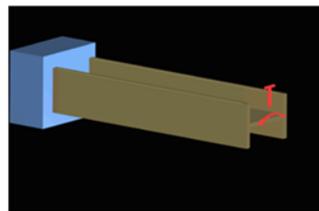
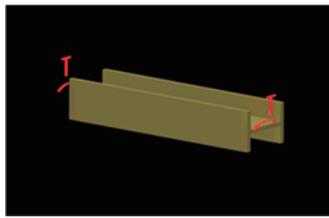
非圆杆扭转的研究方法：弹性力学的方法研究

非圆杆扭转的分类：

1、自由扭转（纯扭转）， 2、约束扭转。

自由扭转：各横截面翘曲程度不受任何约束（可自由凹凸），
任意两相邻截面翘曲程度相同。

约束扭转：由于约束条件或受力限制，造成杆各横截面翘曲程度不同。

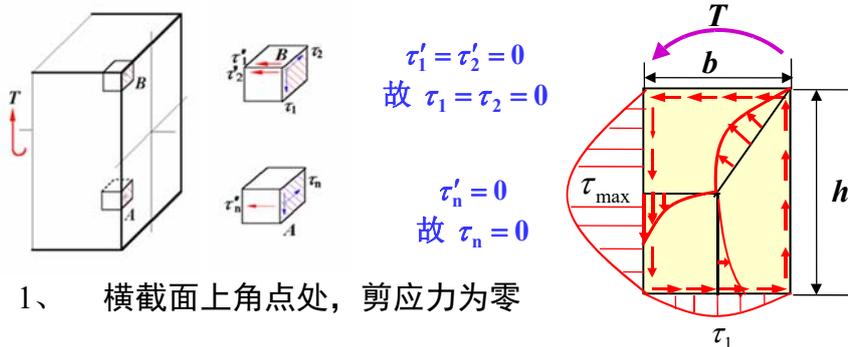


京大
NANJING UNIVERSITY

第7章 圆轴扭转时的应力变形分析以及强度和刚度设计

www.slope.com.cn

矩形截面杆自由扭转时应力分布特点



- 1、横截面上角点处，剪应力为零
- 2、横截面边缘各点处，剪应力 // 截面周边
- 3、横截面周边长边中点处，剪应力最大

南京大學
NANJING UNIVERSITY

第7章 圆轴扭转时的应力变形分析以及强度和刚度设计

www.slope.com.cn

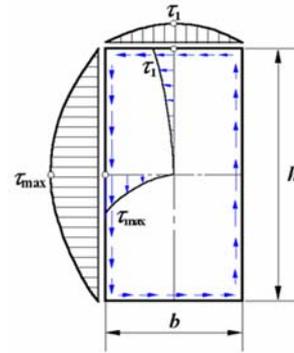
矩形截面杆自由扭转时应力计算 (弹性力学解)

长边中点 τ 最大

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_t} = \frac{T}{\alpha hb^2}$$

$$\tau_1 = \gamma \tau_{\max}$$

$$\phi = \frac{Tl}{GI_t} = \frac{Tl}{G\beta hb^3}$$

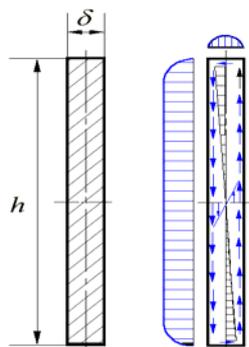
系数 α, β, γ 与 h/b 有关

第7章 圆轴扭转时的应力变形分析以及强度和刚度设计

www.slope.com.cn

狭长矩形

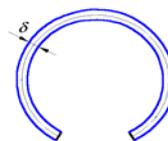
$$\left(\frac{h}{\delta} \geq 10 \right), \quad \alpha \approx \beta \approx \frac{1}{3}$$

当 $h \geq 10\delta$ 时

$$\tau_{\max} = \frac{3T}{h\delta^2}$$

$$\phi = \frac{3Tl}{Gh\delta^3}$$

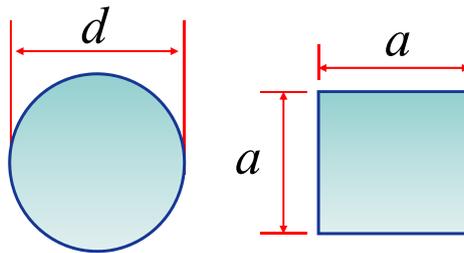
推广应用



第7章 圆轴扭转时的应力变形分析以及强度和刚度设计

www.slope.com.cn

例： T, G, A, l 均相同的两根轴，分别为圆截面和正方形截面。试求：两者的最大扭转切应力与扭转变形，并进行比较。

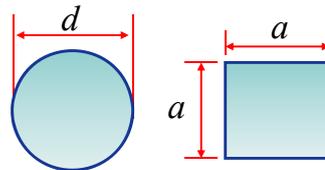


第7章 圆轴扭转时的应力变形分析以及强度和刚度设计

www.slope.com.cn

解： 1) 圆截面 circular

$$\tau_{\max}^c = \frac{16T}{\pi d^3}, \quad \varphi_c = \frac{32Tl}{G\pi d^4}$$



2) 矩形截面 square

$$\tau_{\max}^s = \frac{T}{\alpha \cdot a^3} = \frac{T}{0.208a^3}, \quad \varphi_s = \frac{Tl}{G\beta a^4} = \frac{Tl}{0.141a^4}$$

3) 两者的比值： $\frac{\pi d^2}{4} = a^2, \Rightarrow a = \frac{\sqrt{\pi}d}{2}$

$$\frac{\tau_{\max}^c}{\tau_{\max}^s} = \frac{16 \times 0.208 a^3}{\pi} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)^3 = 0.737, \quad \frac{\varphi_c}{\varphi_s} = \frac{32 \times 0.141}{\pi} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)^4 = 0.886$$

结论： 扭转强度和刚度，圆形截面比正方形截面要好。



第7章 圆轴扭转时的应力变形分析以及强度和刚度设计

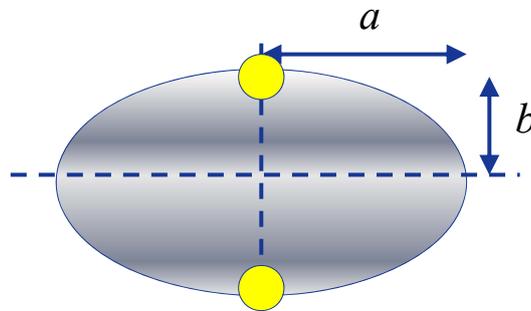
www.slope.com.cn

2. 椭圆截面杆

$$\tau = \frac{2T}{\pi ab} \left(\frac{z^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} \right)^{0.5}$$

$$\tau_{\max} = \frac{2T}{\pi ab^2}$$

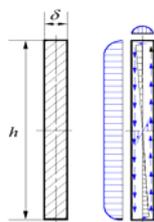
$$\text{当 } a = b = \frac{D}{2} \text{ 时} \quad \tau_{\max} = \frac{16T}{\pi D^3}$$



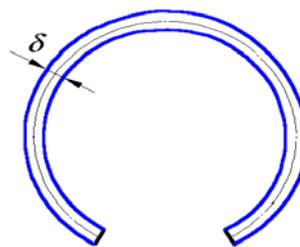
第7章 圆轴扭转时的应力变形分析以及强度和刚度设计

www.slope.com.cn

3. 开口薄壁杆



推广应用


 h —中心线总长 $h \approx \pi D$

$$\tau_{\text{开}} = \frac{3T}{h\delta^2} \quad \phi_{\text{开}} = \frac{3Tl}{Gh\delta^3}$$



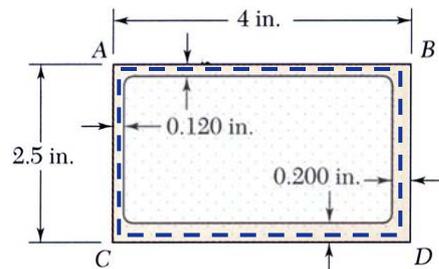
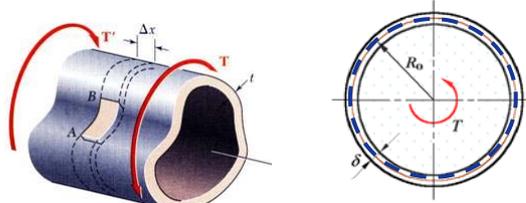
第7章 圆轴扭转时的应力变形分析以及强度和刚度设计

www.slope.com.cn

4. 闭口薄壁杆

$$\tau_{\text{闭}} = \frac{T}{2\omega\delta}$$

$$\phi_{\text{闭}} = \frac{Tls}{4G\omega^2\delta}$$

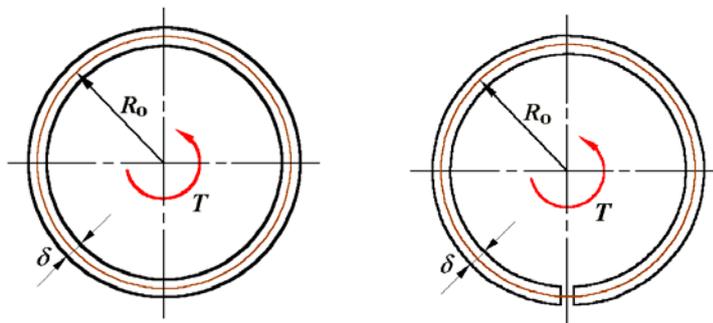


 NANJING UNIVERSITY

第7章 圆轴扭转时的应力变形分析以及强度和刚度设计

www.slope.com.cn

例 比较闭口与开口薄壁圆管的抗扭性能， 设 $R_0=20d$



 南京大学
 NANJING UNIVERSITY

第7章 圆轴扭转时的应力变形分析以及强度和刚度设计

www.slope.com.cn

解：1. 闭口薄壁圆管

$$\tau_{\text{闭}} = \frac{T}{2\pi R_0^2 \delta}$$

$$\phi_{\text{闭}} = \frac{Tl}{2\pi R_0^3 G \delta}$$

2. 开口薄壁圆管

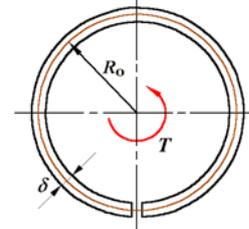
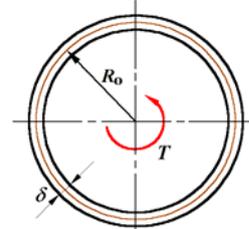
$$\tau_{\text{开}} = \frac{3T}{h\delta^2} = \frac{3T}{2\pi R_0 \delta^2}$$

$$\phi_{\text{开}} = \frac{3Tl}{Gh\delta^3} = \frac{3Tl}{2\pi R_0 G \delta^3}$$

3. 抗扭性能比较

$$\frac{\tau_{\text{开}}}{\tau_{\text{闭}}} = 3 \left(\frac{R_0}{\delta} \right) = 60$$

$$\frac{\phi_{\text{开}}}{\phi_{\text{闭}}} = 3 \left(\frac{R_0}{\delta} \right)^2 = 1200$$



南京大学
NANJING UNIVERSITY



作业：

www.slope.com.cn