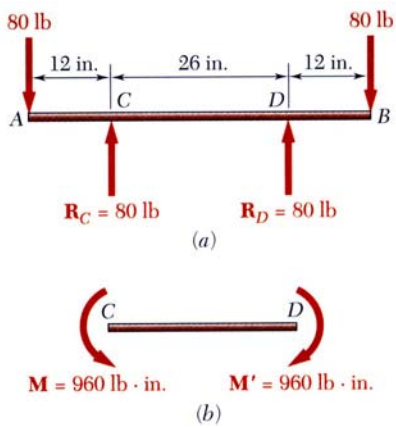
Engineering Mechanics 工程力学

朱鸿鹄
南京大学地球科学与工程学院

第8章 弯曲强度问题

梁（Beam）：以弯曲变形为主的构件



注意举重运动员两手位置！

南京大学 NANJING UNIVERSITY

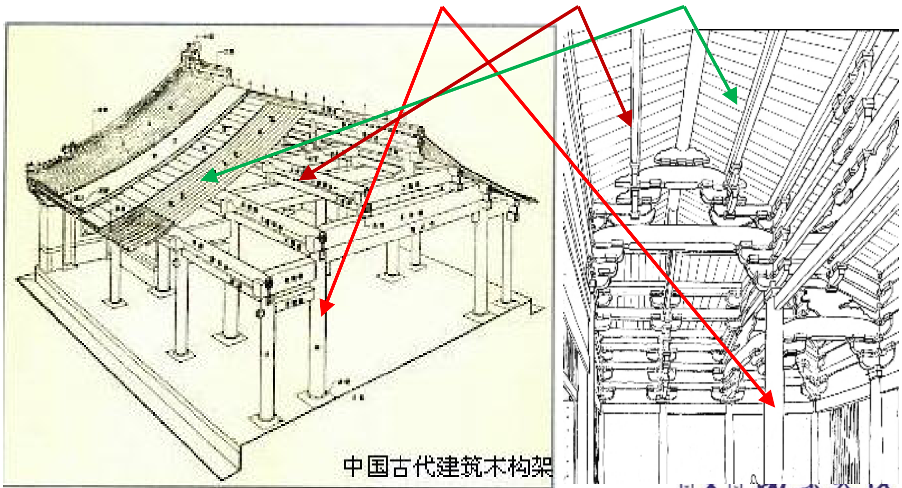
第8章 弯曲强度问题

梁桥是桥梁结构类型中最常见的一种

南京大学 NANJING UNIVERSITY

第8章 弯曲强度问题

中国古代建筑中的立柱、横梁、顺檩



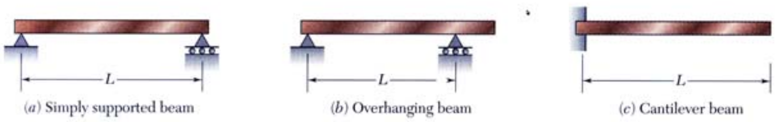
中国古代建筑木构架

NANJING UNIVERSITY

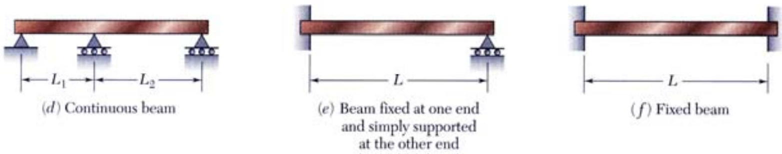
第8章 弯曲强度问题

梁的常见类型

静定梁：简支梁、悬/外伸梁、悬臂梁

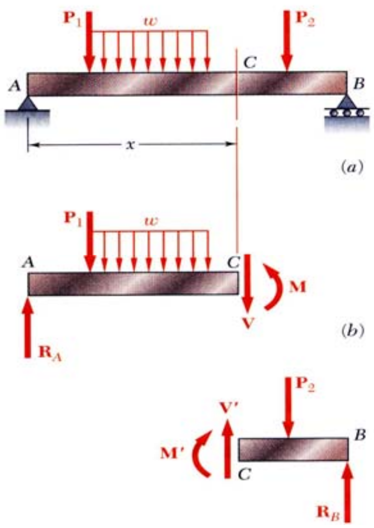


超静定梁：连续梁、悬臂简支梁、两端悬臂梁



NANJING UNIVERSITY

第8章 弯曲强度问题



梁的内力图包括剪力图和弯矩图(shear and moment diagrams)

用截面法求解：与拉压轴力图、扭矩图类似

NANJING UNIVERSITY

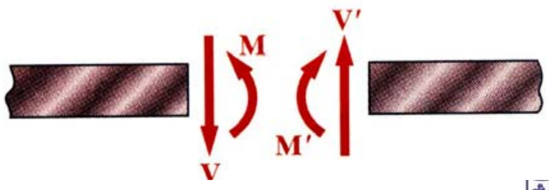
第8章 弯曲强度问题

内力正负号规定：

▪弯矩：（受拉区）下正上负

本教材中为免混淆正弯矩统一画在受拉侧，
不考虑正负号

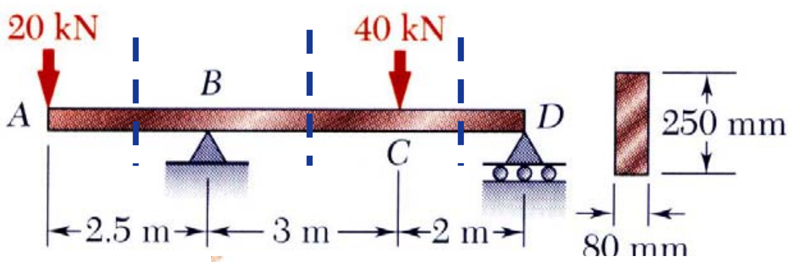
▪剪力：顺正逆负



第8章 弯曲强度问题

www.slope.com.cn

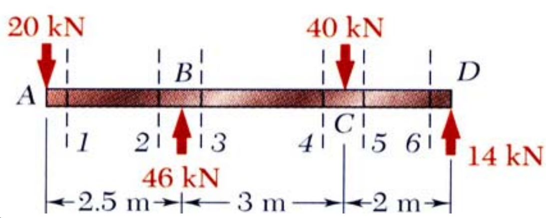
例

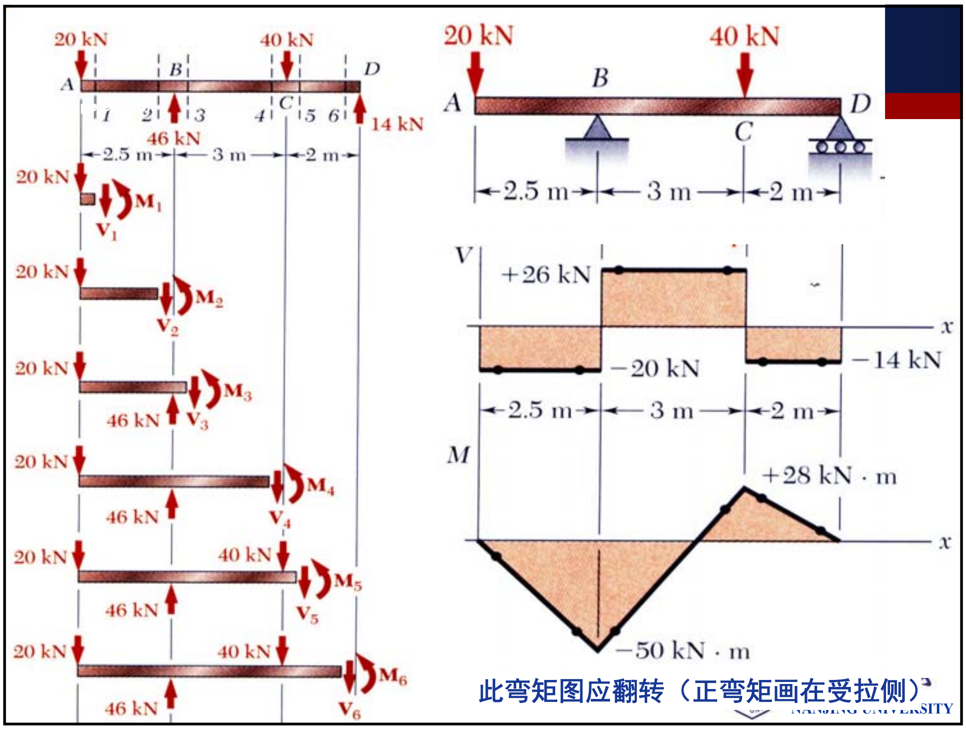


1. 首先确定支座反力

2. 截面法求剪力、弯矩

先假定剪力、弯矩为正，
再根据平衡条件计算大小





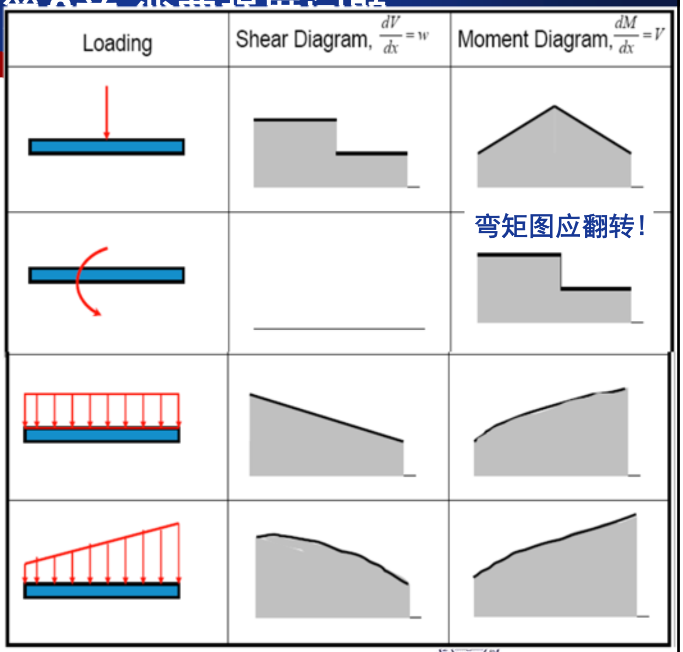
此弯矩图应翻转（正弯矩画在受拉侧）

掌握规律

$$\frac{\mathrm{d}\,Q(x)}{\mathrm{d}\,x}=q(x)$$

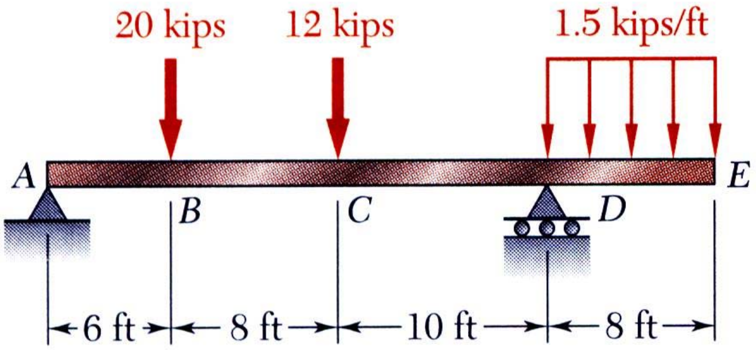
$$\frac{\mathrm{d}\,M(x)}{\mathrm{d}\,x}=Q(x)$$

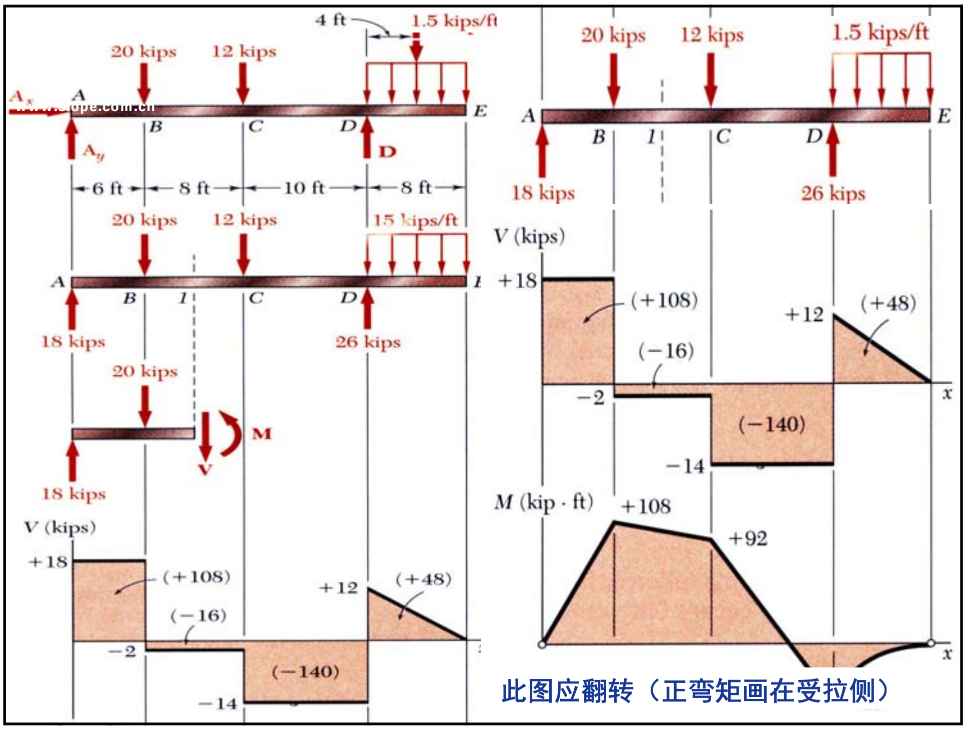
$$\frac{\mathrm{d}^2\,M(x)}{\mathrm{d}\,x^2}=q(x)$$



第8章 弯曲强度问题

例 请同学们做这题：

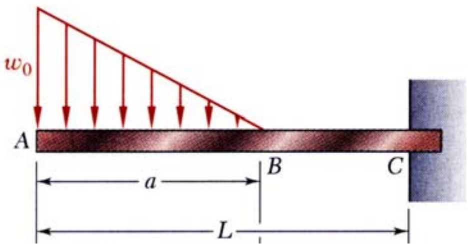


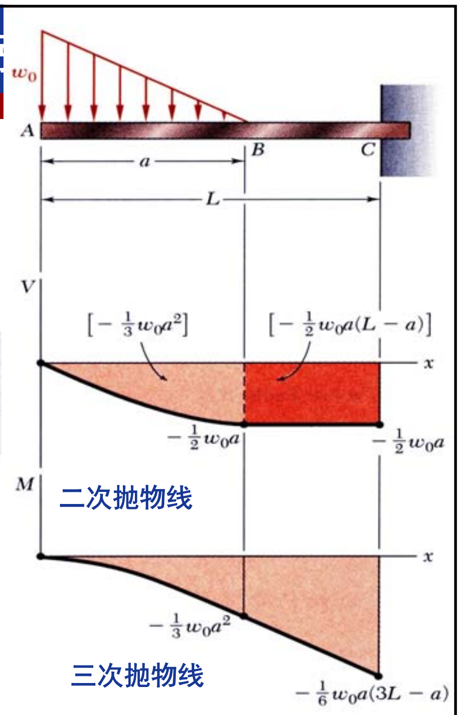


此图应翻转（正弯矩画在受拉侧）

第8章 弯曲

例 悬臂梁





第8章 弯曲强度问题

8.1 弯曲正应力

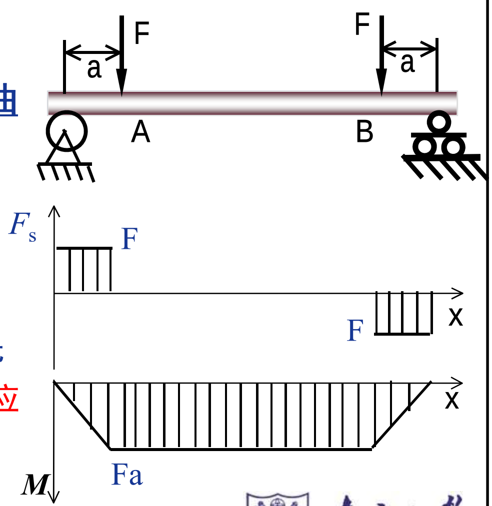
两类弯曲：纯弯曲和横力弯曲

剪力“F_s”——剪应力“τ”；

弯矩“M”——正应力“σ”

1．纯弯曲(Pure bending)

梁的横截面上只有弯矩而无剪力的弯曲（横截面上只有正应力而无切应力的弯曲）



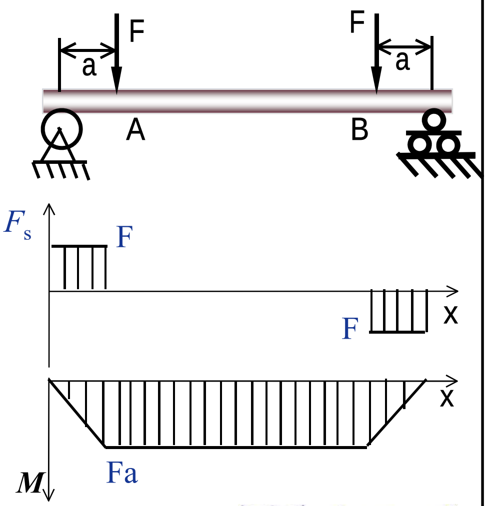
南京大学 NANJING UNIVERSITY

第8章 弯曲强度问题

2. 横力弯曲（transverse bending）

=梁的横截面上既有弯矩又有剪力的弯曲(又称剪切弯曲)

=梁的横截面上既有正应力又有切应力的弯曲



第8章 弯曲强度问题

一、纯弯曲正应力

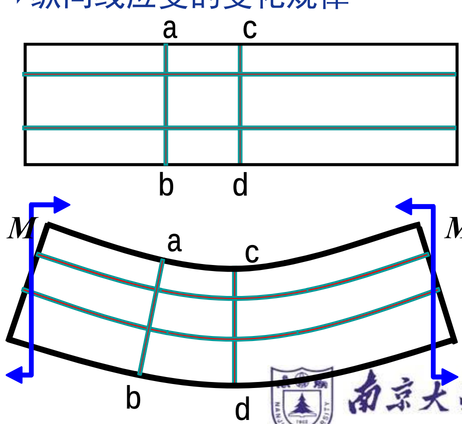
（一）变形几何关系：

由纯弯曲的变形规律→纵向线应变的变化规律

1、变形规律：

(1) 横向线：仍为直线，只是相对转动了一个角度且仍与纵向线正交

(2) 纵向线：由直线变为曲线，且靠近上部的纤维缩短，靠近下部的纤维伸长



第8章 弯曲强度问题

2、假设：

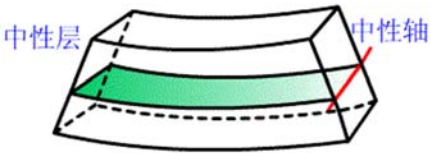
（1）弯曲平面假设：梁变形前原为平面的横截面变形后仍为平面，且仍垂直于变形后的轴线，只是各横截面绕其上的某轴转动了一个角度

（2）纵向纤维假设：梁是由许多纵向纤维组成的，且各纵向纤维之间无挤压

中间层与横截面的交线－中性轴

凹入一侧纤维缩短

突出一侧纤维伸长



梁的弯曲变形实际上是各截面绕各自的中性轴转动了一个角度，等高度的一层纤维的变形完全相同

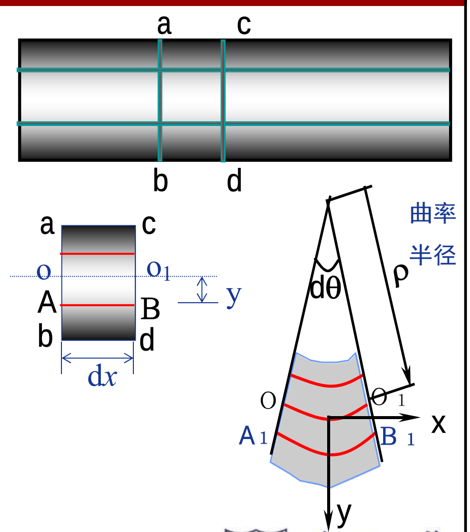
第8章 弯曲强度问题

3、线应变的变化规律：

$$\varepsilon = \frac{\overset{\frown}{A_1B_1} - AB}{AB} = \frac{\overset{\frown}{A_1B_1} - \overset{\frown}{OO_1}}{\overset{\frown}{OO_1}}$$

$$= \frac{(\rho + y)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = \frac{y}{\rho}$$

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho} \qquad \cdots\cdots \qquad (1)$$

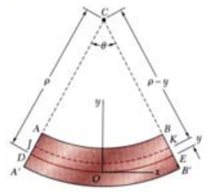


第8章 弯曲强度问题

www.slope.com.cn

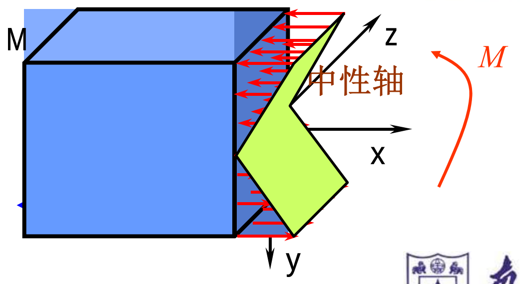
（二）物理关系：由纵向线应变的变化规律→正应力的分布规律

在弹性范围内， $\sigma = E\varepsilon$



$$\sigma = E\,\varepsilon = \frac{E\,y}{\rho} \qquad \ldots\ldots\ (2)$$

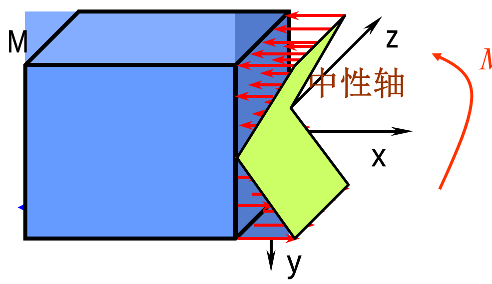
应力的分布图：

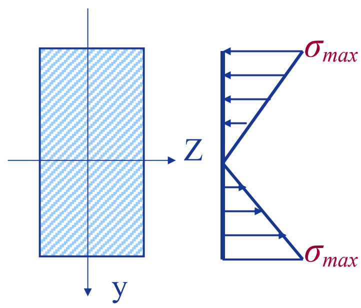


NANJING UNIVERSITY

第8章 弯曲强度问题

www.slope.com.cn





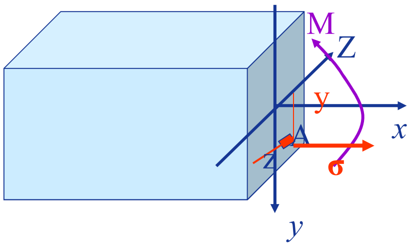
1. 中性轴的位置？

2. 中性层的曲率与弯矩的关系？ $\dfrac{1}{\rho} = ?$

$\dfrac{1}{\rho}$ 为梁弯曲变形后的曲率

NANJING UNIVERSITY

第8章 弯曲强度问题



（三）静力方面：

由横截面上的弯矩和正应力的关系→正应力的计算公式

(1) $F_N = \int_A \sigma dA \quad = \int_A E\frac{y}{\rho}dA = \frac{E}{\rho}\int_A ydA = \frac{E}{\rho}S_z = 0 \Rightarrow S_z = 0$

（静矩S_z为零–>中性轴Z轴为形心轴）

(2) $M_y = \int_A \sigma dAz \quad = \int_A E\frac{y}{\rho}zdA = \frac{E}{\rho}\int_A yzdA = \frac{E}{\rho}I_{yz} = 0 \Rightarrow I_{yz} = 0$

（惯性积 I_{yz}为零–>y轴为对称轴，自然满足）

(3) $M_z = \int_A y\sigma dA \quad = \int_A\left(E\frac{y}{\rho}\right)ydA = \frac{E}{\rho}\int_A y^2dA = \frac{E}{\rho}I_z = M$

（惯性矩 I_z和弯矩的关系）

南京大学 NANJING UNIVERSITY

第8章 弯曲强度问题

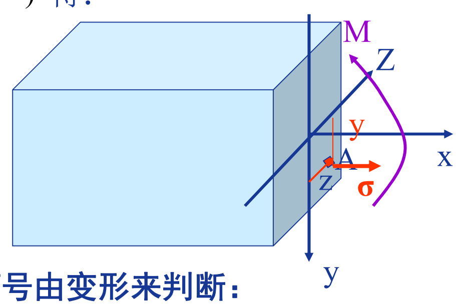
弯曲变形计算的基本公式 $\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_Z}}$

E：材料的弹性模量　I_Z：横截面对Z轴的惯性矩　EI_z：梁的抗弯刚度

将上式代入式 $(\sigma = E\varepsilon = \frac{Ey}{\rho})$ 得：

$$\boxed{\sigma = \frac{M}{I_z}y}$$

这就是弯曲正应力计算公式



弯矩可代入绝对值，应力的符号由变形来判断：

当M＞0时，下拉上压；当M＜0时，上拉下压

南京大学 NANJING UNIVERSITY

第8章 弯曲强度问题

比较变形的基本计算公式

轴向拉压 $\Delta L = \dfrac{NL}{EA}$ EA：抗拉刚度

扭转 $\theta = \dfrac{d\varphi}{dx} = \dfrac{T}{GI_P}$ GI_P：抗扭刚度

$I_P = \int_A \rho^2 \, dA$

弯曲 $\dfrac{1}{\rho} = \dfrac{M}{EI_Z}$ EI_z：抗弯刚度

$I_z = \int_A y^2 \, dA$

第8章 弯曲强度问题

www.slope.com.cn

比较应力的基本计算公式

轴向拉压 $\sigma_{max} = \dfrac{N_{max}}{A}$ A：横截面面积

扭转 $\tau_{max} = \dfrac{T_{max}}{W_P}$ W_P：抗扭截面系数

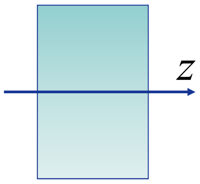
弯曲 $\sigma_{max} = \dfrac{M_{max}}{W_Z}$ W_z：抗弯截面系数

南京大学 NANJING UNIVERSITY

第8章 弯曲强度问题

梁上最大正应力的确定

(1) 截面关于中性轴对称



$$\sigma_{\max} = \frac{My_{\max}}{I_Z}$$

$$W_Z = \frac{I_Z}{y_{\max}}$$

W_z：截面的抗弯截面系数

量纲：mm³或m³

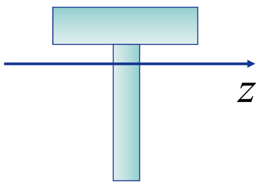
$$\boxed{\sigma_{\max}^{t} = \sigma_{\max}^{c} = \frac{M}{W_z}}$$

NANJING UNIVERSITY

第8章 弯曲强度问题

www.slope.com.cn

(2) 截面关于中性轴不对称



$$\sigma_{\max}^{t} = \frac{My_{\max}^{t}}{I_z}$$

$$\sigma_{\max}^{c} = \frac{My_{\max}^{c}}{I_z}$$

NANJING UNIVERSITY

第8章 弯曲强度问题

几种常见截面的 I_Z 和 W_Z　　$I_z = \int_A y^2 dA$　　$W_Z = \dfrac{I_Z}{y_{\max}}$

圆截面　　$I_Z = \dfrac{\pi d^4}{64}$　　$W_Z = \dfrac{\pi d^3}{32}$

空心圆截面　　$I_Z = \dfrac{\pi D^4}{64}(1-\alpha^4)$　　$W_Z = \dfrac{\pi D^3}{32}(1-\alpha^4)$

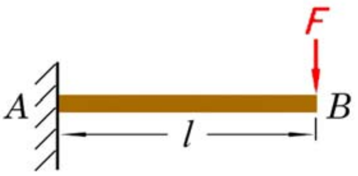
矩形截面　　$I_Z = \dfrac{bh^3}{12}$　　$W_Z = \dfrac{bh^2}{6}$

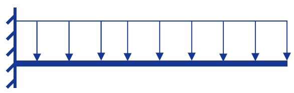
空心矩形截面　　$I_Z = \dfrac{b_0 h_0^3}{12} - \dfrac{bh^3}{12}$　　$W_Z = \left(\dfrac{b_0 h_0^3}{12} - \dfrac{bh^3}{12}\right)/(h_0/2)$

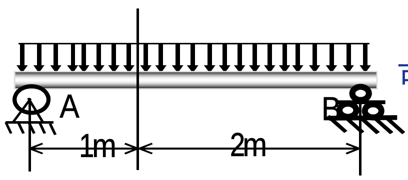
南京大学 NANJING UNIVERSITY

第8章 弯曲强度问题

二、横力弯曲正应力







工程中常见的平面弯曲是横力弯曲

实验和弹性力学理论的研究都表明：当跨度 l 与横截面高度 h 之比 $l/h > 5$（细长梁）时，纯弯曲正应力公式对于横力弯曲近似成立。

弯曲正应力公式　　$\sigma = \dfrac{My}{I_Z}$

可推广应用于横力弯曲和小曲率梁

南京大学 NANJING UNIVERSITY

第8章 弯曲强度问题

横力弯曲梁上的最大正应力

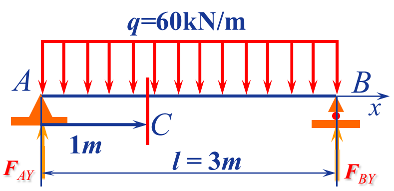
截面关于中性轴对称 $\sigma_{\max}^{t}=\sigma_{\max}^{c}=\dfrac{M_{\max}}{W_z}$

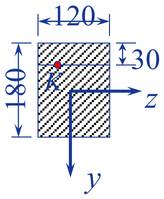
截面关于中性轴不对称 $\sigma_{\max}=\dfrac{M_{\max}y_{\max}}{I_Z}$

注意：最大拉应力、最大压应力可能发生在不同的截面内

第8章 弯曲强度问题

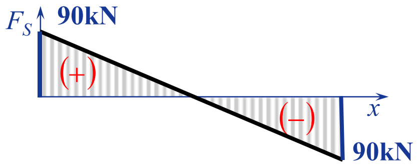
例





1. C 截面上K点正应力
2. C 截面上最大正应力
3. 全梁上最大正应力
4. 已知E=200GPa，C 截面的曲率半径ρ

解：1. 求支反力

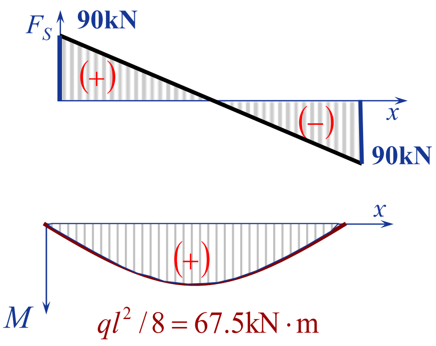


$F_{Ay}=90\text{kN}\quad F_{By}=90\text{kN}$

$M_C=90\times1-60\times1\times0.5=60\text{kN}\cdot\text{m}$

$I_Z=\dfrac{bh^3}{12}=\dfrac{0.12\times0.18^3}{12}=5.832\times10^{-5}\text{m}^4$

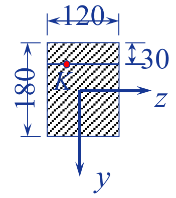
第8章 弯曲强度问题



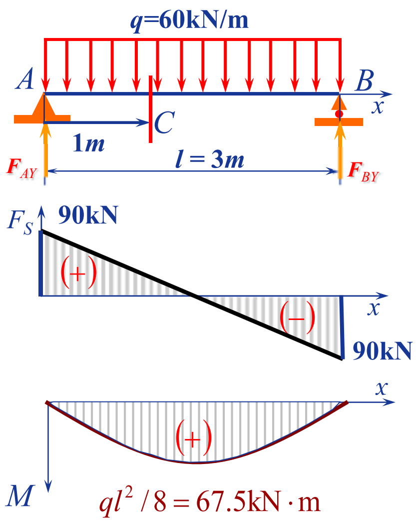
2. C 截面上K点正应力

$$\sigma_K = \frac{M_C \cdot y_K}{I_Z} = \frac{60\times10^3\times(\frac{180}{2}-30)\times10^{-3}}{5.832\times10^{-5}}$$

$$= 61.7\times10^6\,\text{Pa} = 61.7\,\text{MPa}$$ （压应力）



第8章 弯曲强度问题



3. C 截面最大正应力

C 截面弯矩 $M_C = 60\text{kN}\cdot\text{m}$

$$I_Z = 5.832\times10^{-5}\,\text{m}^4$$

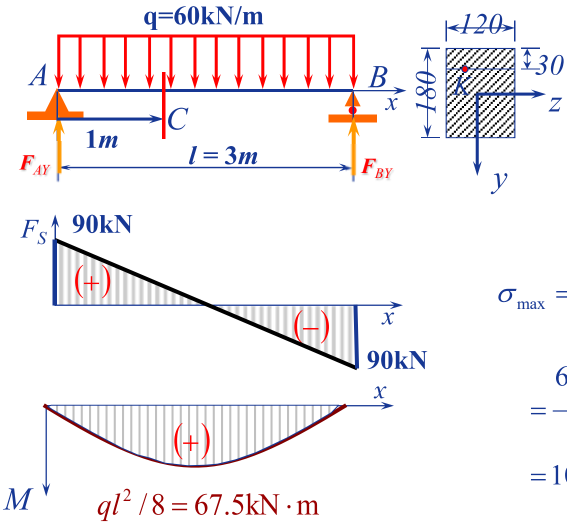
$$\sigma_{C\max} = \frac{M_C \cdot y_{\max}}{I_Z}$$

$$= \frac{60\times10^3\times\frac{180}{2}\times10^{-3}}{5.832\times10^{-5}}$$

$$= 92.55\times10^6\,\text{Pa} = 92.55\,\text{MPa}$$

第8章 弯曲强度问题

www.slope.com.cn



4. 全梁最大正应力

最大弯矩

$$M_{\max} = 67.5\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$I_z = 5.832\times10^{-5}\,\text{m}^4$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}y_{\max}}{I_Z}$$

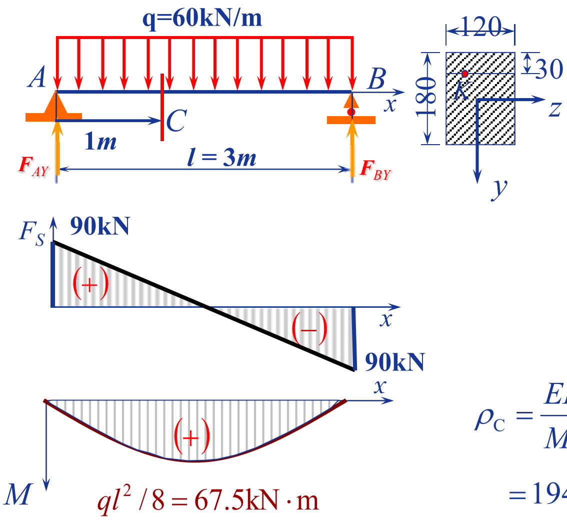
$$= \frac{67.5\times10^3\times\dfrac{180}{2}\times10^{-3}}{5.832\times10^{-5}}$$

$$= 104.17\times10^6\,\text{Pa} = 104.17\text{MPa}$$

南京大学 NANJING UNIVERSITY

第8章 弯曲强度问题

www.slope.com.cn



5. C 截面曲率半径ρ

C 截面弯矩

$$M_C = 60\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$I_Z = 5.832\times10^{-5}\,\text{m}^4$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

$$\rho_C = \frac{EI_Z}{M_C} = \frac{200\times10^9\times5.832\times10^{-5}}{60\times10^3}$$

$$= 194.4\text{m}$$

南京大学 NANJING UNIVERSITY

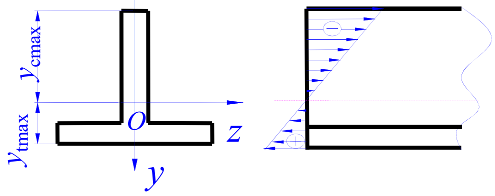
第8章 弯曲强度问题

三、正应力强度条件

$\sigma_{\max} \le [\sigma]$ ➡ 材料的许用弯曲正应力

中性轴为横截面对称轴的等直梁 $\dfrac{M_{\max}}{W_z} \le [\sigma]$

拉、压强度不相等的铸铁、混凝土等脆性材料制成的梁



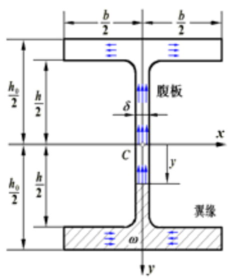
$\sigma_{t\max} \le [\sigma_t]$

$\sigma_{c\max} \le [\sigma_c]$

第8章 弯曲强度问题

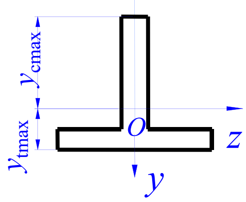
为什么型钢一般加工成工字型或者槽型？

抗拉强度=抗压强度



为什么混凝土梁一般采用T字形截面？

抗拉强度<抗压强度

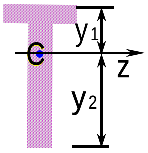


受压区

受拉区

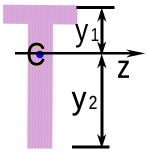
第8章 弯曲强度问题

T型混凝土梁有时受拉区和受压区沿轴向发生变化



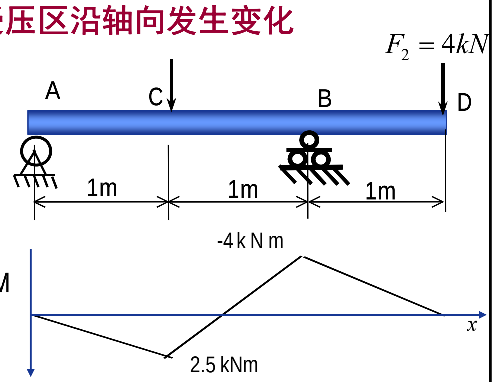
受拉区

受压区



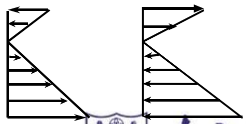
受压区

受拉区



如何解决？

在受拉区配筋！



多动脑筋，少 配钢筋！

NANJING UNIVERSITY

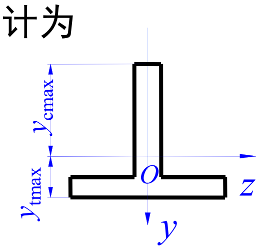
第8章 弯曲强度问题

为充分发挥材料的强度，最合理的设计为

$$\sigma_{\text{tmax}} = \frac{M_{\max} y_{\text{tmax}}}{I_z} \le [\sigma_{\text{t}}]$$

$$\sigma_{\text{cmax}} = \frac{M_{\max} y_{\text{cmax}}}{I_z} \le [\sigma_{\text{c}}]$$

$$\frac{y_{\text{tmax}}}{y_{\text{cmax}}} = \frac{[\sigma_{\text{t}}]}{[\sigma_{\text{c}}]}$$



三类计算：

1、强度校核—— $\sigma_{\max} \le [\sigma]$；

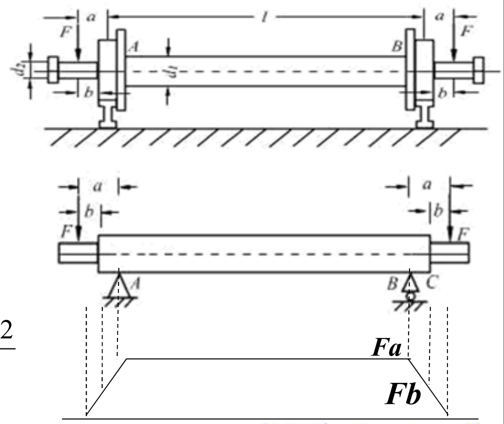
2、设计截面尺寸—— $W_z \ge \dfrac{M_{\max}}{[\sigma]}$

3、确定外荷载—— $M_{\max} \le W_z [\sigma]$；

NANJING UNIVERSITY

第8章 弯曲强度问题

例 图示为机车轮轴的简图。试校核轮轴的强度。已知 $d_1 = 160\ \text{mm}$ $d_2 = 130\ mm$,$a = 0.267\ \text{m}$,$b = 0.16\ \text{m}$,$F = 62.5\text{kN}$,材料的许用应力 $[\sigma] = 60\ \text{MPa}$.



解:(1)计算简图

(2)绘弯矩图

(3)B截面、C截面需校核

(4)强度校核

B截面:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_B|}{W_{zB}} = \frac{Fa}{\frac{\pi d_1^3}{32}} = \frac{62.5 \times 267 \times 32}{\pi \times 0.16^3}$$

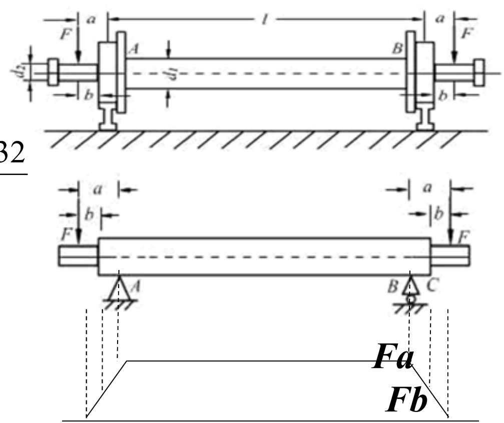
$$= 41.5 \times 10^6 \text{Pa} = 41.5\text{MPa}$$

NANJING UNIVERSITY

第8章 弯曲强度问题

www.slope.com.cn

C截面:



$$\sigma_{\max} = \frac{|M_C|}{W_{zC}} = \frac{Fb}{\frac{\pi d_2^3}{32}} = \frac{62.5 \times 160 \times 32}{\pi \times 0.13^3}$$

$$= 46.4 \times 10^6 \text{Pa} = 46.4\text{MPa}$$

(5)结论:轮轴安全

NANJING UNIVERSITY

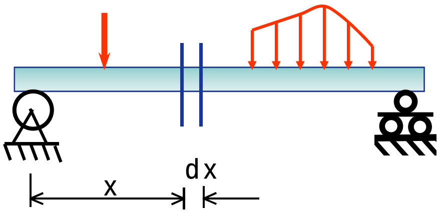
第8章 弯曲强度问题

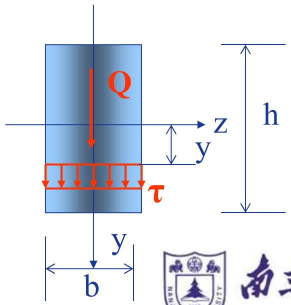
8. 2 弯曲切应力

一、 矩形截面切应力

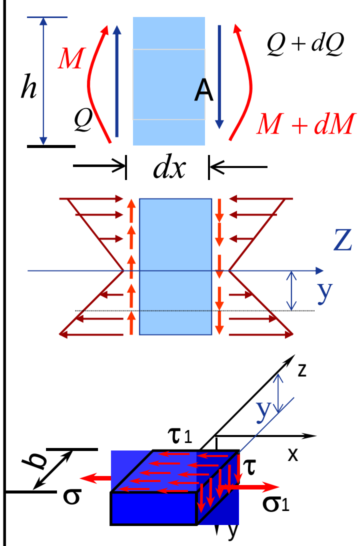
1、假设：(1) 横截面上各点的切应力方向与剪力的方向相同

(2) 切应力沿截面宽度均匀分布（距中性轴等距离的各点切应力大小相等）





第8章 弯曲强度问题



图C

2、公式推导

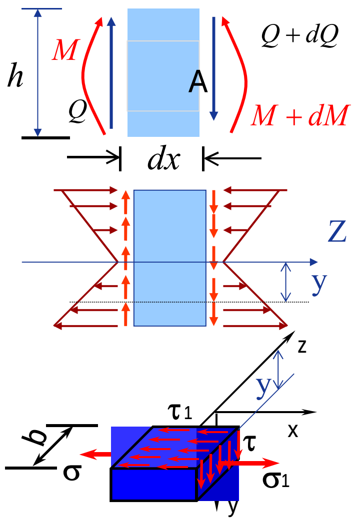
$$\sum X = N_1 - N - \tau_1 b(dx) = 0$$

$$N = \int_{A^*} \sigma dA^* = \frac{M}{I_z}\int_{A^*} y dA^* = \frac{MS_z^*}{I_z}$$

$$N_1 = \frac{(M + dM)S_z^*}{I_z}$$

注意：I_z 为整个横截面对 z 轴的惯性矩；b为所求点对应位置截面的宽度；S_z^* 为所求点对应位置以外的面积对Z轴的静矩

第8章 弯曲强度问题



图C

$$\tau_1 = \frac{dM}{dx}\frac{S_z^*}{bI_z} = \frac{QS_z^*}{bI_z}$$

由切应力互等定理可知

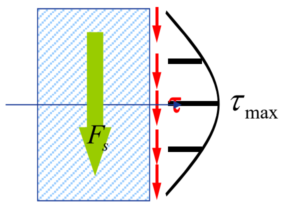
$$\tau = \frac{QS_z^*}{I_z b}$$

第8章 弯曲强度问题

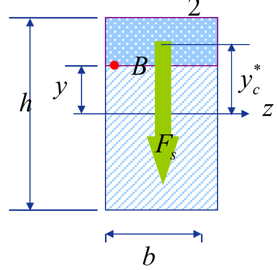
www.slope.com.cn

3、矩形截面切应力的分布：

$$\tau = \frac{QS_z^*}{I_z b}$$



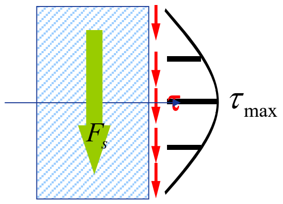
$$A^* = b(\frac{h}{2} - y)$$



$$S_z^* = y_c^* A^* = \frac{\frac{h}{2} + y}{2} b(\frac{h}{2} - y) = \frac{b}{2}(\frac{h^2}{4} - y^2)$$

$$\therefore \tau = \frac{Q}{2I_z}(\frac{h^2}{4} - y^2) \qquad \tau_{\max} = \frac{3}{2}\frac{Q}{A} = 1.5\bar{\tau}$$

第8章 弯曲强度问题



$$\tau = \frac{Q}{2I_z}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

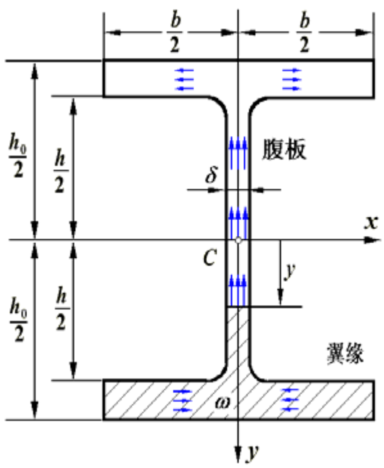
(1) τ沿截面高度按二次抛物线规律变化

(2) 同一横截面上的最大切应力τ_{max}在中性轴处(y=0)

(3) 上下边缘处（y=±h/2)，切应力为零

第8章 弯曲强度问题

二、 工字形截面切应力



1. 腹板上的切应力仍按矩形截面的公式计算

假设： τ平行于腹板侧边，并沿其厚度均匀分布

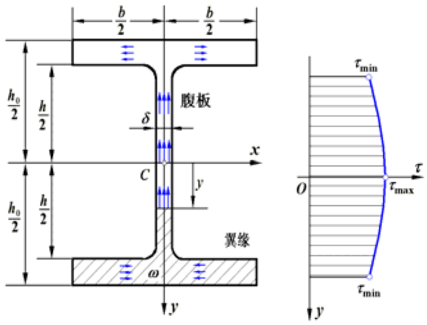
$$\tau(y) = \frac{QS_z^*}{I_z t}$$

S_z^* ——下侧部分截面对中性轴z的静矩

第8章 弯曲强度问题

$$\tau(y)=\frac{Q}{8I_z t}\left[B(H^2-h^2)+t(h^2-4y^2)\right]$$

$\tau_{\max}=\tau(0)$ $\tau_{\min}=\tau(\pm\frac{h}{2})$

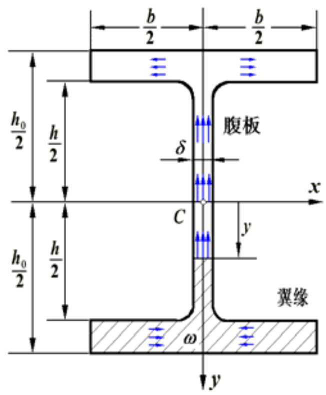


NANJING UNIVERSITY

第8章 弯曲强度问题

2. 翼缘板上的切应力

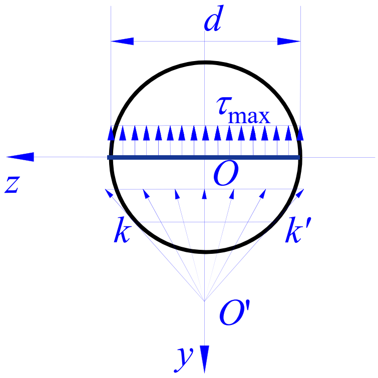
$$\tau(y)=\frac{Q}{4I_z t}(H+h)\left(\frac{B}{2}-z\right)$$



NANJING UNIVERSITY

第8章 弯曲强度问题

三、非矩形截面梁



1. 圆形截面梁切应力的分布特征

边缘各点切应力的方向与圆周相切；切应力分布与 y 轴对称；与 y轴相交各点处的切应力其方向与y轴一致

关于其切应力分布的假设：

1、离中性轴为任意距离y的水平直线段上各点处的切应力汇交于一点

2、这些切应力沿 y方向的分量τ_y沿宽度相等

$$\tau_y = \frac{QS_z^*}{I_z b(y)}$$

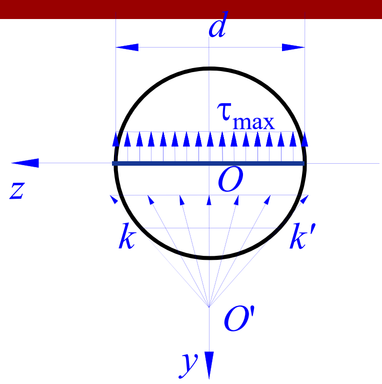
第8章 弯曲强度问题

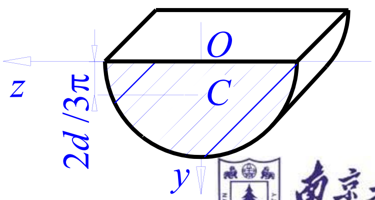
最大切应力τ_{max} 在中性轴处

$$\tau_{max} = \frac{QS_z^*}{I_z d}$$

$$= \frac{Q\left[\left(\frac{1}{2}\times\frac{\pi d^2}{4}\right)\times\frac{2d}{3\pi}\right]}{\frac{\pi d^4}{64}\times d}$$

$$= \frac{4Q}{3\left(\frac{\pi}{4}d^2\right)} = \frac{4Q}{3A}$$





第8章 弯曲强度问题

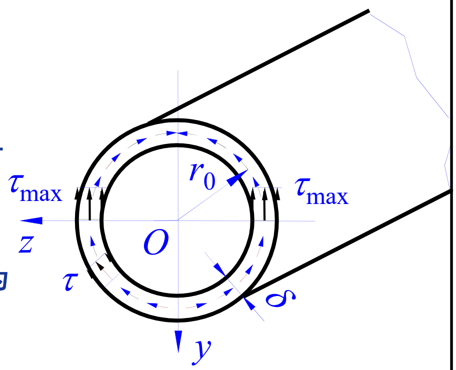
2、薄壁圆环截面梁

弯曲切应力的分布特征：

(1) $d \ll r_0$ ➞沿壁厚切应力的大小不变

(2) 内、外壁上无切应力➞剪应力的方向与圆周相切

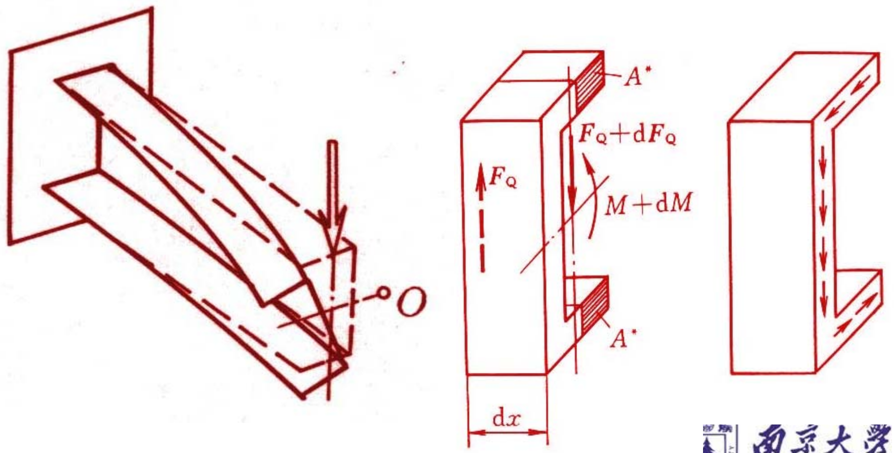
(3) y 轴是对称轴 ➞ 剪应力分布与 y 轴对称；与 y 轴相交的各点处剪应力为零



最大切应力 τ_{max} 仍发生在中性轴 z 上

第8章 弯曲强度问题

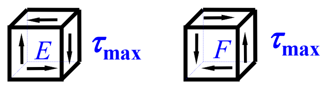
弯曲中心和切应力流（略）

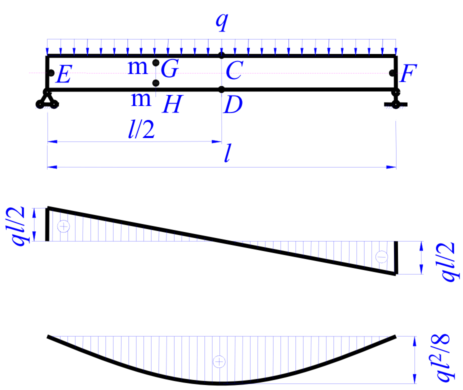


第8章 弯曲强度问题

四、梁的切应力强度条件

一般τ_{max}发生在Q_{max}所在截面的中性轴处。不计挤压，则τ_{max}所在点处于纯剪切应力状态





梁的切应力强度条件为

$$\tau_{max} \le [\tau]$$

对等直梁

$$\frac{Q_{max} S^*_{z\,max}}{I_z b} \le [\tau]$$

材料在横力弯曲时的许用切应力

第8章 弯曲强度问题

弯曲切应力的强度条件 $$\tau_{max} = \frac{Q_{max} S^*_{z\,max}}{I_z b} \le [\tau]$$

1、校核强度　2、设计截面尺寸　3、确定外荷载

需要校核切应力的几种特殊情况：

(1) 梁的跨度较短，*M* 较小，而 *Q* 较大时，要校核切应力

(2) 铆接或焊接的组合截面，其腹板的厚度与高度比小于型钢的相应比值时，要校核切应力

(3) 各向异性材料（如木材）的抗剪切能力较差，要校核切应力

第8章 弯曲强度问题

总结一下，梁的合理设计需要考虑：

1. 合理配置荷载和支座
2. 合理选取截面形状
3. 合理设计外形

NANJING UNIVERSITY

作业：