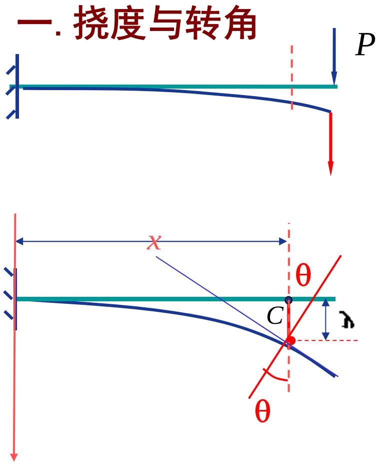
Engineering Mechanics 工程力学

朱鸿鹄
南京大学地球科学与工程学院

第9章 弯曲刚度问题

9.1 弯曲变形

一. 挠度与转角



1、挠曲线：梁变形后的轴线

性质：连续、光滑、弹性、

极其平坦的平面曲线

2、挠度：横截面形心沿垂直于轴线方向的位移。用“y”表示

3、转角：横截面绕中性轴转过的角度。用“θ”表示

NANJING UNIVERSITY

第9章 弯曲刚度问题

挠度和转角的关系

$y = v(x)$ ……挠曲线方程　　挠度向下为正；向上为负

$\theta = \theta(x)$ ……　转角方程　由变形前的横截面转到变形后，顺时针为正；逆时针为负

$$tg\theta = \frac{dy}{dx} = v'(x)$$

$\theta \approx tg\theta \Rightarrow \theta = v'$　　挠曲线为一条平坦的曲线

二．刚度条件：许可挠度、许可转角

第9章 弯曲刚度问题

三．挠曲线微分方程

1、曲率与弯矩的关系：

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\rho(x)} = \frac{M(x)}{EI_z} \quad \cdots\cdots (1)$$

2、曲率与挠曲线的关系（数学表达式）

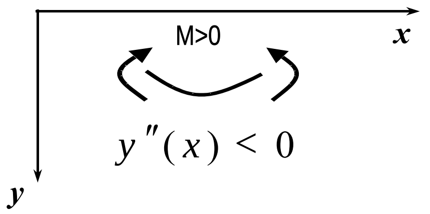
$$\frac{1}{\rho(x)} = \pm \frac{y''}{\left[1+(y')^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad \because y' << 1, \therefore \rightarrow\rightarrow \quad \frac{1}{\rho(x)} = \pm y'' \quad \cdots\cdots (2)$$

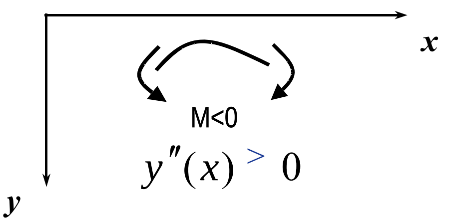
3、挠曲线与弯矩的关系：

联立（1）、（2）两式得 $\rightarrow$ $\dfrac{M(x)}{EI} = \pm y''$

$$\rightarrow \quad EI\,y'' = \pm M(x)$$

第9章 弯曲刚度问题





结论：挠曲线近似微分方程—— $EI\,y'' = -M(x)$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI}$$

挠曲线近似微分方程的近似性——忽略了剪力Q以及 $(y')^2$ 对变形的影响

使用条件：弹性范围内工作的细长梁

南京大学 NANJING UNIVERSITY

第9章 弯曲刚度问题

9.2 积分法计算梁的变形

基本步骤：

1、根据荷载分段列出弯矩方程 ***M*（*x*）**

2、根据弯矩方程列出挠曲线的近似微分方程并进行积分

$$EIy''(x) = -M(x)$$

$$EIy'(x) = \int -M(x)dx + C_1$$

$$EIy(x) = \int\left(\int -M(x)dx\right)dx + C_1x + C_2$$

南京大学 NANJING UNIVERSITY

第9章 弯曲刚度问题

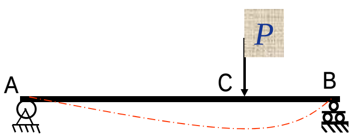
3、根据弯曲梁变形的边界条件和连续条件确定积分常数

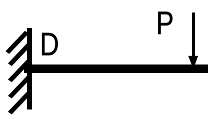
（1）固定支座处：挠度和转角等于零

（2）固定铰支座处、可动铰支座处：挠度等于零

（3）在弯矩方程分段处：一般情况下左、右的两个截面挠度相等、转角相等

第9章 弯曲刚度问题





边界条件：　$y_A = 0$　$y_B = 0$　$y_D = 0$　$\theta_D = 0$

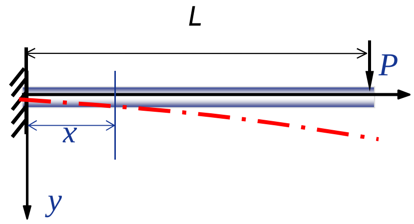
连续条件：　$y_{C左} = y_{C右}$　$\theta_{C左} = \theta_{C右}$

4、确定挠曲线方程和转角方程

5、计算任意截面的挠度、转角挠度的最大值、转角最大值

第9章 弯曲刚度问题

例



解：

a）建立坐标系并写出弯矩方程

$$M(x) = -P(L-x)$$

b）写出微分方程并积分

$$EIy'' = -M(x) = P(L-x)$$

$$EIy' = -\frac{1}{2}P(L-x)^2 + C_1$$

$$EIy = \frac{1}{6}P(L-x)^3 + C_1x + C_2$$

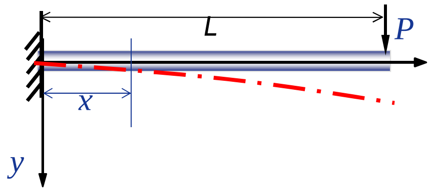
第9章 弯曲刚度问题

www.slope.com.cn

c）应用位移边界条件求积分常数

$x=0$, $y=0$; $\theta=0$

$$\therefore C_1 = \frac{1}{2}PL^2 \ ; \ C_2 = -\frac{1}{6}PL^3$$



d）确定挠曲线、转角方程

$$y(x) = \frac{P}{6EI}\left[3Lx^2 - x^3\right] \qquad \theta = y' = -\frac{P}{2EI}\left[x^2 - 2Lx\right]$$

e) 自由端的挠度及转角 $y(L) = \dfrac{PL^3}{3EI}$ $\theta(L) = \dfrac{PL^2}{2EI}$

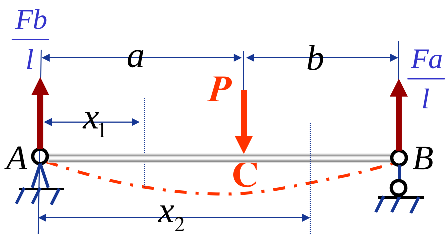
第9章 弯曲刚度问题

例：求图示梁的跨中的挠度和转角（*EI*=常数） $a+b=l$

解：a) 建立坐标系并写出弯矩方程

左侧段（$0\le x_1\le a$）：

$$M(x_1)=\frac{Pb}{L}x_1$$



右侧段（$a\le x_2\le L$）：

$$M(x_2)=\frac{Pb}{L}x_2-P(x_2-a)$$

第9章 弯曲刚度问题

b) 写出微分方程并积分

左侧段（$0\le x_1\le a$）：

$$EIy_1''=-\frac{Pb}{L}x_1$$

$$EIy_1'=-\frac{Pb}{2L}x_1^2+C_1$$

$$EIy_1=-\frac{Pb}{6L}x_1^3+C_1x_1+D_1$$

右侧段（$a\le x_2\le L$）：

$$EIy_2''=-\frac{Pb}{L}x_2+P(x_2-a)$$

$$EIw_2''=-\frac{Pb}{2L}x_2^2+\frac{P(x_2-a)^2}{2}+C_2$$

$$EIy_2=-\frac{Pb}{6L}x_2^3+\frac{P(x_2-a)^3}{6}+C_2x_2+D_2$$

c) 应用位移边界条件和连续条件求积分常数

$x=0$，$y=0$；$x=L$，$y=0$． $x_1=x_2=a$， $y_1=y_2$； $y'_1=y'_2$

$$\Rightarrow \quad C_1=C_2=\frac{Pb}{6L}(L^2-b^2);\quad D_1=D_2=0$$

第9章 弯曲刚度问题

d) 确定挠曲线和转角方程

$$y_1 = \frac{Pbx_1}{6LEI}\left[L^2 - b^2 - x_1^2\right] \qquad y_2 = \frac{Pb}{6LEI}\left[\frac{L}{b}(x_2 - a)^3 - x_2^3 + (L^2 - b^2)x_2\right]$$

$$\theta_1 = y_1' = \frac{Pb}{6LEI}\left[(L^2 - b^2) - 3x_1^2\right] \qquad \theta_2 = y_2' = \frac{Pb}{2LEI}\left[\frac{L}{b}(x_2 - a)^2 - x_2^2 + \frac{1}{3}(L^2 - b^2)\right]$$

e) 跨中点挠度及两端端截面的转角

$$y\Big|_{x=\frac{L}{2}} = \frac{Pb}{48EI}(3L^2 - 4b^2); \qquad \theta = y'\Big|_{x=\frac{L}{2}} = \frac{Pb}{24LEI}\left[L^2 - 4b^2\right]$$

两端支座处的转角—— $\theta_A = \dfrac{Pab(L+b)}{6LEI}$; $\theta_B = -\dfrac{Pab(L+a)}{6LEI}$

第9章 弯曲刚度问题

www.slope.com.cn

讨论：1、此梁的最大挠度和最大转角。

左侧段

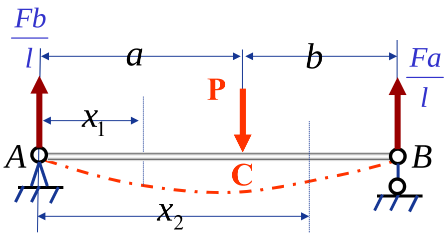
$$\theta_{1\max} \rightarrow y_1'' = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$\theta_{1\max} = \theta_A = \frac{Pab(L+b)}{6LEI}$$

右侧段

$$\theta_{2\max} \rightarrow y_2'' = 0 \Rightarrow x_2 = L$$

$$\theta_{2\max} = \theta_B = -\frac{Pab(L+a)}{6LEI}$$



第9章 弯曲刚度问题

当 a＞b 时—最大转角

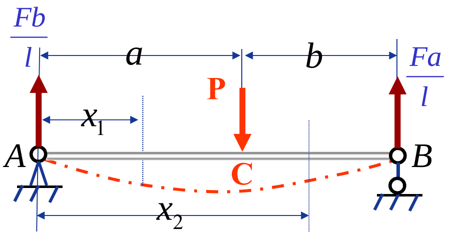
$$\theta_{\max} = \theta_B = \frac{Pab(L+a)}{6LEI}$$

当 a＞b 时——最大挠度发生在AC段

$$y_{\max} \to y' = 0 \Rightarrow x_1 = \sqrt{\frac{L^2 - b^2}{3}} = \sqrt{\frac{a(a+2b)}{3}}$$

$x_1 < a \Rightarrow$ 最大挠度一定在左侧段

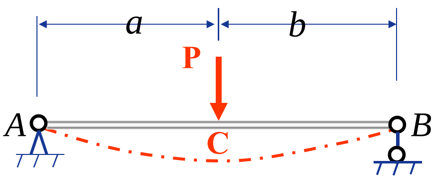
$$y_{\max} = y_1\big|_{x=x_1} = \frac{Pb}{9\sqrt{3}LEI}\sqrt{(l^2-b^2)^3}$$



第9章 弯曲刚度问题

www.slope.com.cn

2、a=b 时此梁的最大挠度和最大转角



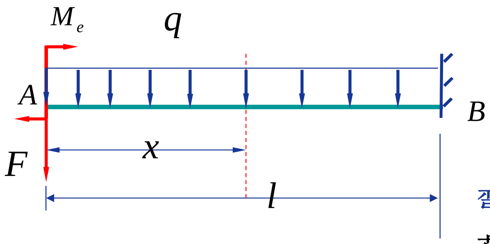
$$\theta_{\max} = \frac{\theta_A}{\theta_B} = \pm\frac{PL^2}{16EI};$$

$$y_{\max} = y_C\big|_{x=\frac{L}{2}} = \frac{PL^3}{48EI}$$

南京大学
NANJING UNIVERSITY

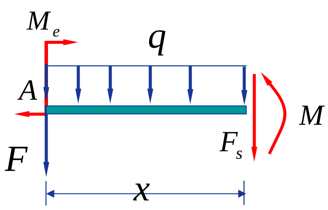
第9章 弯曲刚度问题

9.3 叠加法计算梁的变形



梁上有分布载荷，集中力与集中力偶

弯矩： $M = M_e - Fx - \frac{qx^2}{2}$



弯矩的叠加原理：梁在几个载荷共同作用下的弯矩值，等于各载荷单独作用下的弯矩的代数和

$$M = M_1 + M_2 + M_3$$

$$EIy_i'' = M_i(x) \rightarrow \begin{cases} EIy_1'' = M_1(x) \\ EIy_2'' = M_2(x) \\ EIy_3'' = M_3(x) \end{cases}$$

第9章 弯曲刚度问题

叠加法计算梁的变形：

$$EIy'' = M(x) \quad \begin{cases} y'' = y_1'' + y_2'' + y_3'' \\ M(x) = M_1 + M_2 + M_3 \end{cases}$$

一、前提条件：弹性、小变形

二、叠加原理：各荷载同时作用下，梁任一截面的挠度或转角，等于各荷载分别单独作用下同一梁同一截面挠度或转角的代数和

$$\theta_B(F_1, F_2, \cdots\cdots, F_n) = \theta_{B1}(F_1) + \theta_{B2}(F_2) + \cdots\cdots + \theta_{Bn}(F_n)$$

$$y_B(F_1, F_2, \cdots, F_n) = y_{B1}(F_1) + y_{B2}(F_2) + \cdots\cdots + y_{Bn}(F_n)$$

第9章 弯曲刚度问题

三、叠加法的特征：

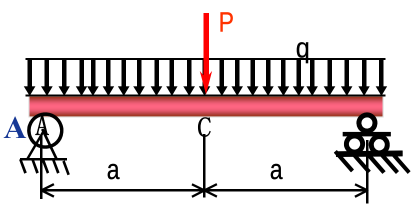
1、梁在简单载荷作用下挠度、转角应为已知或有变形表可查

2、叠加法适用于求梁个别截面的挠度或转角值

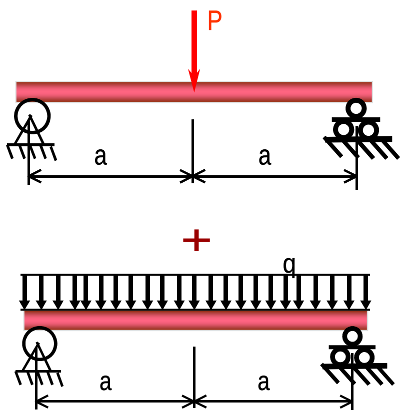
第9章 弯曲刚度问题

例：叠加法求A截面的转角和C截面的挠度.

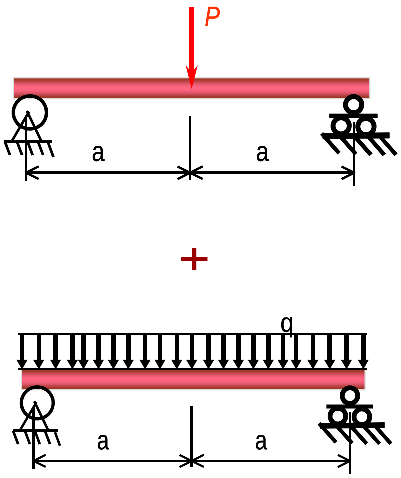
解：a)载荷分解



=



第9章 弯曲刚度问题



b)由梁的简单载荷变形表7.1，查得简单载荷引起的变形

$$\theta_{FA}=\frac{PL^2}{16EI}=\frac{Pa^2}{4EI}$$

$$y_{FC}=\frac{PL^3}{48EI}=\frac{Pa^3}{6EI}$$

$$\theta_{qA}=\frac{qL^3}{24EI}=\frac{qa^3}{3EI}$$

$$y_{qC}=\frac{5qL^4}{384EI}=\frac{5qa^4}{24EI}$$

第9章 弯曲刚度问题

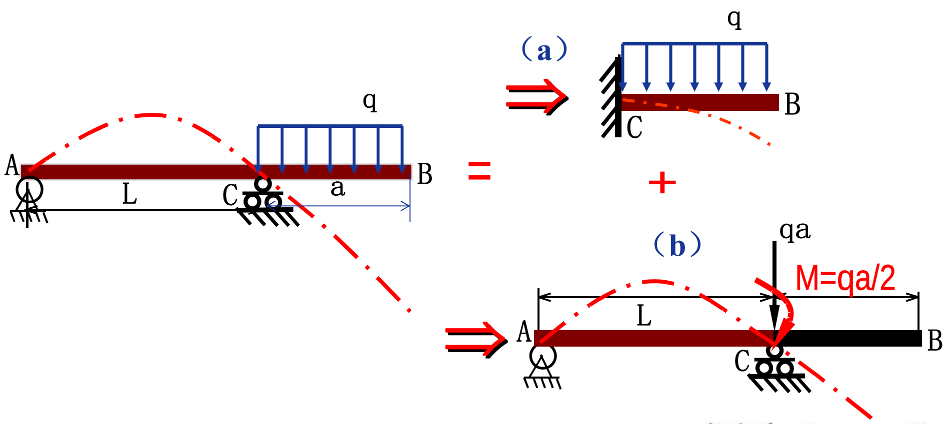
c)转角、挠度叠加：

$$\theta_A=\theta_{FA}+\theta_{qA}=\frac{a^2}{12EI}(3F+4qa)$$

$$y_C=y_{FA}+y_{qA}=\frac{5qa^4}{24EI}+\frac{Fa^3}{6EI}$$

第9章 弯曲刚度问题

例：求图示梁B截面的挠度（*EI* 已知）



第9章 弯曲刚度问题

www.slope.com.cn

解：1）结构分解如图

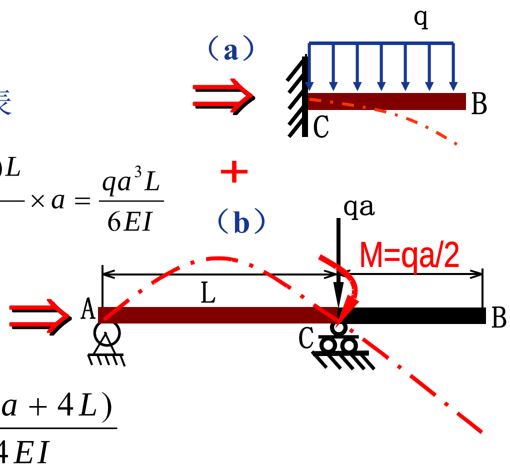
2）查梁的简单载荷变形表

$$y_{Ba}=\frac{qa^4}{8EI};y_{Bb}=\theta_{Cb}\times a=\frac{(\frac{1}{2}qa^2)L}{3EI}\times a=\frac{qa^3L}{6EI}$$

3）叠加

$$y_B=y_{Ba}+y_{Bb}$$

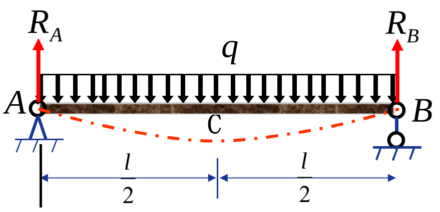
$$=\frac{qa^4}{8EI}+\frac{qa^3L}{6EI}=\frac{qa^3(3a+4L)}{24EI}$$



第9章 弯曲刚度问题

9.4 简单超静定梁

静定问题



$$\sum m_A = 0,\quad R_B l - \frac{ql^2}{2} = 0.$$

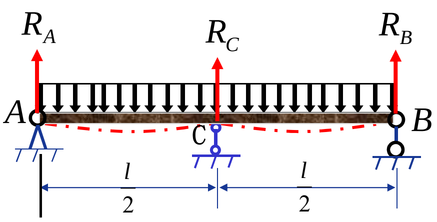
$$\sum m_B = 0,\quad R_A = \frac{ql}{2},\quad R_B = 0.5ql.$$

由平衡方程可以解出全部未知数

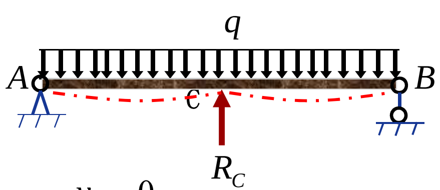
平衡方程数 = 未知数

第9章 弯曲刚度问题

超静定问题



=



$y_c = 0$

二个平衡方程，三个未知数

平衡方程数 ＜ 未知数

去掉多余约束而成为**形式上的静定结构 — 基本静定基**

第9章 弯曲刚度问题

解超静定的步骤 ——（静力、几何、物理条件）

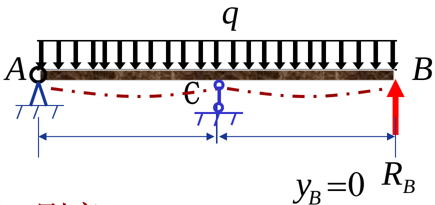
1、用多余约束反力代替多余约束（取静定基，原则：便于计算）

2、在多余约束处根据变形协调条件列出变形的几何方程

3、把物理条件代入几何方程列出力的补充方程求出多余反力

分析—— $y_c = y_{cq} + y_{cR_C} = 0$

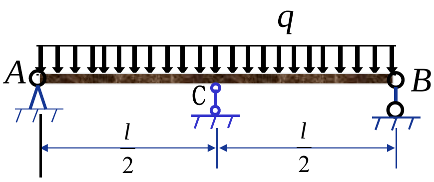
$$-\frac{5ql^4}{384EI}+\frac{R_C l^3}{48EI}=0 \Rightarrow R_C=\frac{5}{8}qL$$

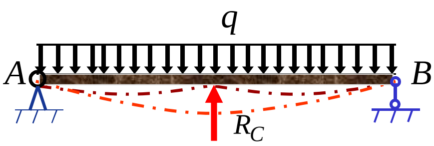


计算梁的内力、应力、强度、变形、刚度

第9章 弯曲刚度问题

例 已知梁的EI，梁的长度，求各约束反力。





解：1)研究对象：AB梁，

受力分析：R_A, R_B, R_C, ql

$$\sum Y=0,\ R_A+R_B+R_C-ql=0$$

$$\sum M_A=0,\ R_B l+0.5R_C l-0.5ql^2=0$$

2)选用静定基，去C支座

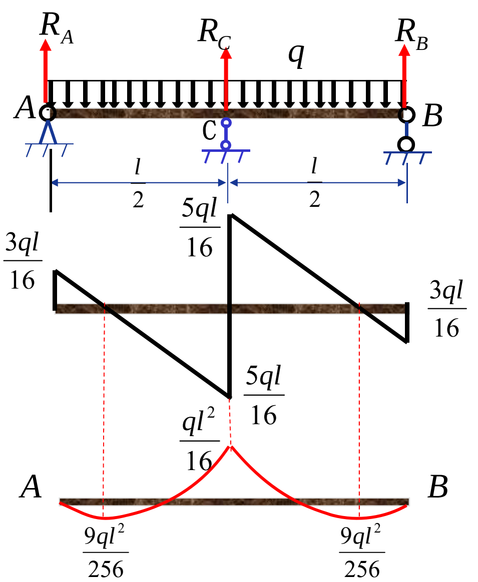
3)变形协调方程

$$y_C = y_{Cq}+y_{CR}=0$$

4)物理条件

$$y_{Cq}=\frac{5ql^4}{384EI},\quad y_{CR_C}=-\frac{R_C l^3}{48EI}$$

第9章 弯曲刚度问题



联立求解:

$$\frac{5ql^4}{384EI}-\frac{R_C l^3}{48EI}=0$$

$$\Rightarrow \quad R_C=\frac{5}{8}qL$$

$$R_A=R_B=\frac{3ql}{16}$$

剪力图、弯矩图

第9章 弯曲刚度问题

梁的刚度校核

$$\frac{v_{\max}}{L}\le\left[\frac{v}{L}\right]$$

$$\theta_{\max}\le[\theta]$$

校核不通过时需采取的措施:

1. 增大梁的抗弯刚度EI

2. 调整跨长、改变结构（例如减少跨长、增加约束、改变力的施加方式和支座位置、预加反弯度）

作业：