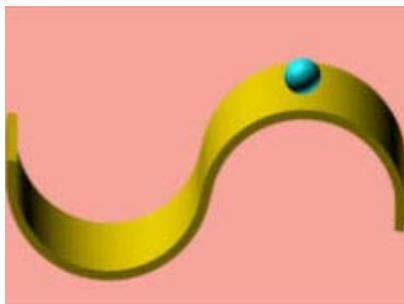




第11章 压杆的稳定性分析与稳定性设计

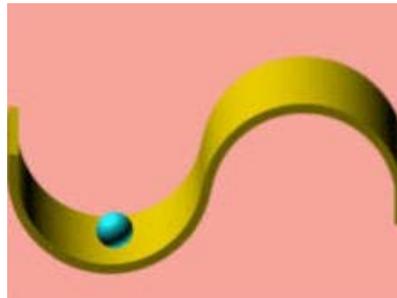
www.slope.com.cn

§ 11-1 基本概念



不稳定平衡

微小扰动就使小球远离原来的平衡位置



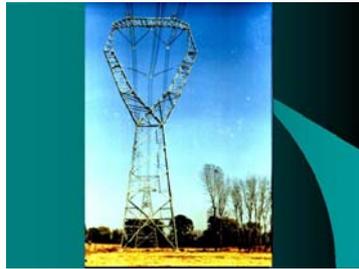
稳定平衡

微小扰动使小球离开原来的平衡位置，但扰动撤销后小球回复到平衡位置



第11章 压杆的稳定性分析与稳定性设计

www.slope.com.cn



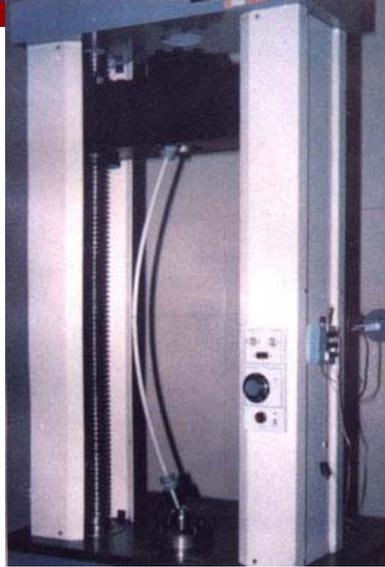
第11章 压杆的稳定性分析与稳定性设计

www.slope.com.cn



第11章 压杆的稳定性分析与稳定性设计

www.slope.com.cn

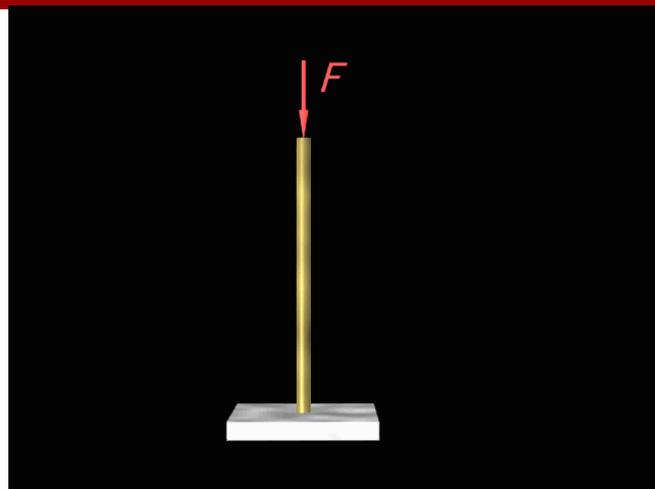


压杆的稳定性试验



第11章 压杆的稳定性分析与稳定性设计

www.slope.com.cn

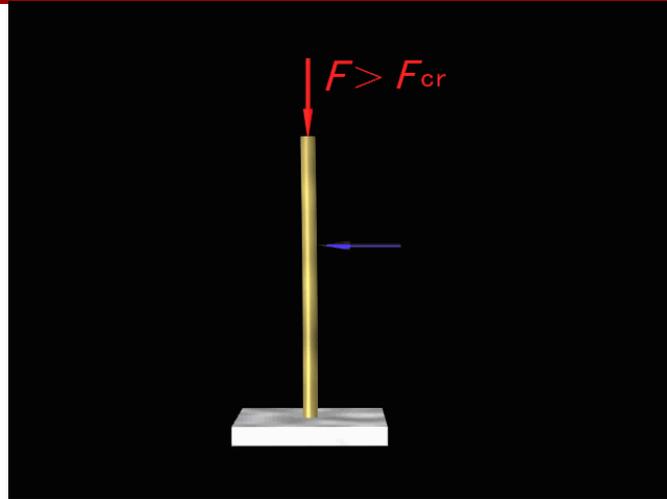


压力小于临界力



第11章 压杆的稳定性分析与稳定性设计

www.slope.com.cn

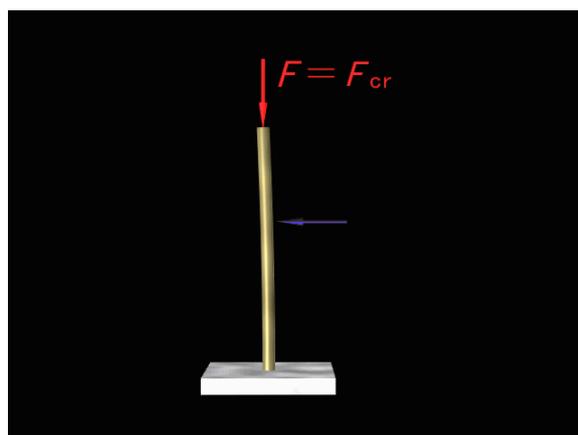


压力大于临界力



第11章 压杆的稳定性分析与稳定性设计

www.slope.com.cn



压力等于临界力

压杆丧失直线
状态的平衡，过渡
到曲线状态的平衡。
失稳 屈曲

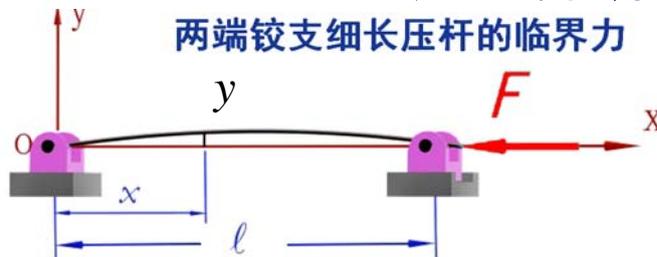


第11章 压杆的稳定性分析与稳定性设计

www.slope.com

§ 11-2 细长压杆的临界力

两端铰支细长压杆的临界力



$$\text{弯矩 } M = -F y$$

挠曲线近似微分方程

$$y'' = \frac{M}{EI}$$

$$y'' = -\frac{F y}{EI}$$

$$\text{令 } k^2 = \frac{F}{EI}$$

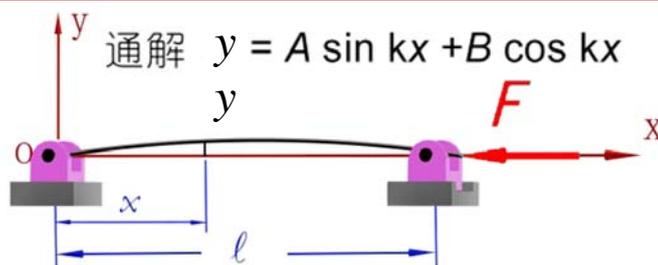
$$y'' + k^2 y = 0$$

$$\text{通解 } y = A \sin kx + B \cos kx$$


 NANJING UNIVERSITY

第11章 压杆的稳定性分析与稳定性设计

www.slope.com.cn



$$\text{通解 } y = A \sin kx + B \cos kx$$

边界条件：

$$(1) \quad x=0, y=0 \quad \text{得} \quad B=0$$

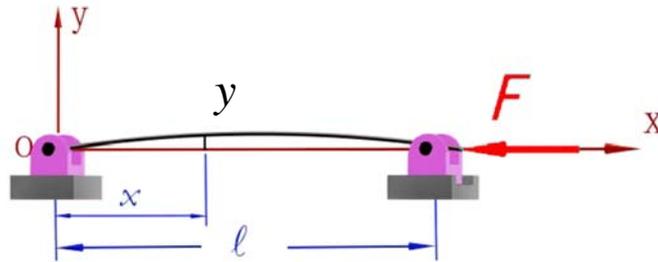
$$y = A \sin kx$$

$$(2) \quad x=l, y=0 \quad \text{得} \quad A \sin kl=0$$


 10 南京大学
 NANJING UNIVERSITY

第11章 压杆的稳定性分析与稳定性设计

www.slope.com.cn

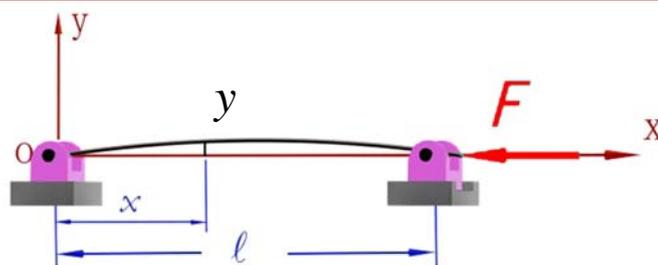


$A \sin kl = 0$ 所以 $\sin kl = 0$
 若 $A = 0$
 则 $y \equiv 0$ $kl = n\pi \quad (n=0, 1, 2, \dots)$
 (与假设矛盾)



第11章 压杆的稳定性分析与稳定性设计

www.slope.com.cn



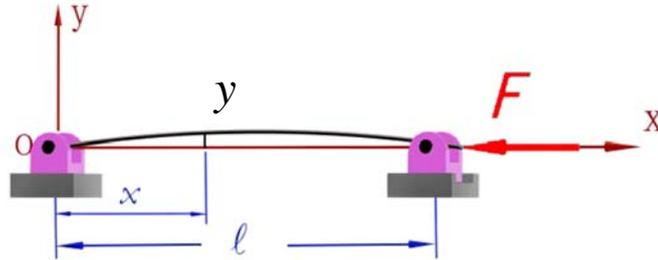
$$k = \frac{n\pi}{l} \quad k^2 = \frac{F}{EI} = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$$

$$\text{得 } F = \frac{n^2\pi^2 EI}{l^2}$$



第11章 压杆的稳定性分析与稳定性设计

www.slope.com.cn



$$F = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2}$$

当 $n=1$ 时, 临界压力

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \text{ 欧拉公式}$$

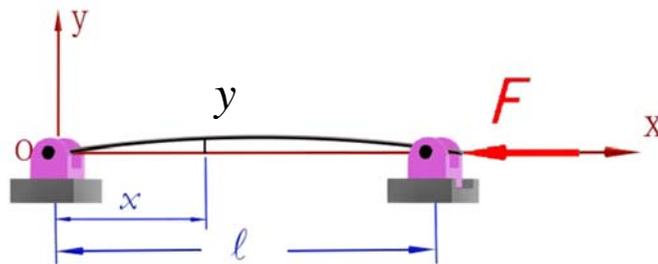
挠曲线方程

$$y = A \sin \frac{\pi x}{l}$$



第11章 压杆的稳定性分析与稳定性设计

www.slope.com.cn



$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

欧拉公式

适用条件:

- 理想压杆 (轴线为直线, 压力与轴线重合, 材料均匀)

- 线弹性, 小变形

- 两端为铰支座



第11章 压杆的稳定性分析与稳定性设计

www.slope.com.cn

例题

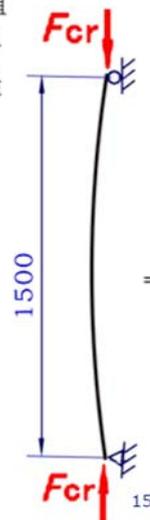
已知：两端铰支

细长压杆，横截面直径 $d = 50 \text{ mm}$ ，材料 Q235 钢，弹性模量

$E = 200 \text{ GPa}$ ，

$\sigma_s = 235 \text{ MPa}$ 。

试确定其临界力。



解：截面惯性矩

$$I = \frac{\pi}{64} d^4 = \frac{\pi}{64} 0.05^4$$

$$= 307 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

临界力

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

$$= \frac{\pi^2 \times 200 \times 10^9 \times 307 \times 10^{-9}}{1.5^2}$$

$$= 269 \times 10^3 \text{ N} = 269 \text{ kN}$$



南京大学
NANJING UNIVERSITY

第11章 压杆的稳定性分析与稳定性设计

www.slope.com.cn

其他约束条件下细长压杆的临界力



南京大学
NANJING UNIVERSITY

第11章 压杆的稳定性分析与稳定性设计

www.slope.com.cn

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} \quad \text{欧拉公式普遍形式}$$

μ 长度系数 (长度因数)

μl 相当长度

两端铰支 $F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(l)^2} \quad \mu = 1$

一端固定一端自由 $F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(2l)^2} \quad \mu = 2$



NANJING UNIVERSITY

第11章 压杆的稳定性分析与稳定性设计

www.slope.com.cn

支 座 情 况	一端自由 一端固定	两端铰支	一端铰支 一端固定	两端固定
简 图				
μ	2	1	0.7	0.5
临界 压力	$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(2l)^2}$	$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$	$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0.7l)^2}$	$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0.5l)^2}$



UNIVERSITY

第11章 压杆的稳定性分析与稳定性设计

§ 11-3 压杆的临界应力

临界压力 $F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$ 压杆柔度 $\lambda = \frac{\mu l}{i}$

临界应力 $\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2 A}$ $\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_p$

惯性半径 $i = \sqrt{\frac{I}{A}}$ $\lambda \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}}$

$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{\mu l}{i}\right)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$ $\lambda_p = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}}$

$\lambda \geq \lambda_p$ (大柔度压杆) 欧拉公式只适用于大柔度压杆



第11章 压杆的稳定性分析与稳定性设计

中小柔度杆临界应力计算

$\lambda \geq \lambda_p$ (大柔度杆) 欧拉公式

$\lambda_s \leq \lambda < \lambda_p$ (中柔度杆)

$\sigma_{cr} = a - b\lambda \leq \sigma_s$

当 $\lambda \geq \frac{a - \sigma_s}{b}$ 时, 经验直线公式

$\lambda_s = \frac{a - \sigma_s}{b}$

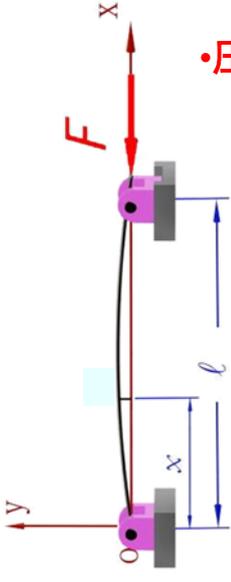
$\lambda < \lambda_s$ (小柔度杆)

$\sigma_{cr} = \sigma_s$



第11章 压杆的稳定性分析与稳定性设计

www.slope.com.cn



• 压杆柔度 $\lambda = \frac{\mu l}{i}$ μ 的四种取值情况 $i = \sqrt{\frac{I}{A}}$

• 临界柔度 $\lambda_p = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}}$ σ_p 比例极限

• 临界应力 $\lambda_s = \frac{a - \sigma_s}{b}$ σ_s 屈服极限

$\lambda \geq \lambda_p$ (大柔度杆) $\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$ 欧拉公式

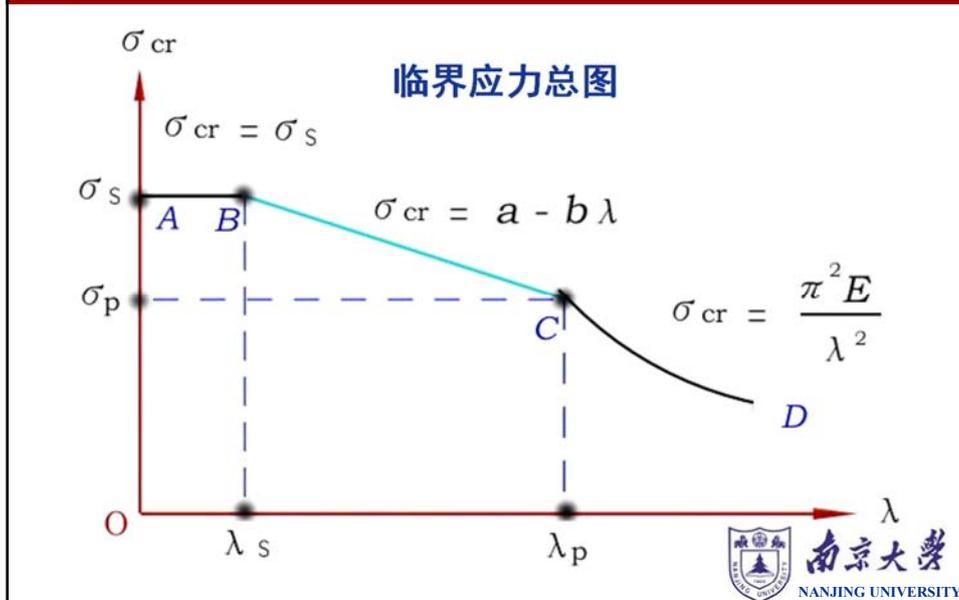
$\lambda_p > \lambda \geq \lambda_s$ (中柔度杆) $\sigma_{cr} = a - b\lambda$ 直线公式

$\lambda < \lambda_s$ (小柔度杆) $\sigma_{cr} = \sigma_s$ 强度问题

NANJING UNIVERSITY

第11章 压杆的稳定性分析与稳定性设计

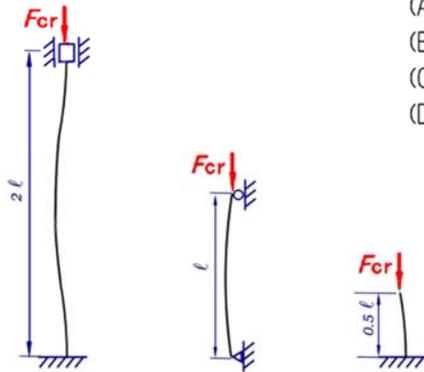
www.slope.com.cn



第11章 压杆的稳定性分析与稳定性设计

www.slope.com.cn

讨论题 图示三根压杆，截面面积及材料各不相同，但它们的 ____ 相同。



- (A) 长度因数； μ
- (B) 相当长度； μl
- (C) 柔度； $\mu l / i$
- (D) 临界压力。

$$F_{cr} = \sigma_{cr} \cdot A$$



第11章 压杆的稳定性分析与稳定性设计

www.slope.com.cn

§ 11-4 压杆的稳定校核

$$F \leq [F] = \frac{F_{cr}}{n_{st}} \quad n_{st}: \text{稳定安全系数}$$

$$\text{工作安全系数} \quad n = \frac{F_{cr}}{F} \geq n_{st}$$

$$n = \frac{\sigma_{cr}}{\sigma} \geq n_{st}$$



例题

已知拖架D处承受载荷 $F=10\text{kN}$ 。AB杆外径 $D=50\text{mm}$ ，内径 $d=40\text{mm}$ ，材料Q235钢， $E=200\text{GPa}$ 。 $\lambda_p=100$ ， $[n_{st}]=3$ 。校核AB杆的稳定性。

解： CD梁 $\sum M_C = 0$

$$F \cdot 2000 = F_N \cdot \sin 30^\circ \cdot 1500$$

得 $F_N = 26.6\text{kN}$

AB杆 $\lambda = \frac{\mu l}{i} \quad \mu = 1$

$$l = \frac{1.5}{\cos 30^\circ} = 1.732\text{m}$$

南京大學
NANJING UNIVERSITY

例题

已知拖架D处承受载荷 $F=10\text{kN}$ 。AB杆外径 $D=50\text{mm}$ ，内径 $d=40\text{mm}$ ，材料Q235钢， $E=200\text{GPa}$ 。 $\lambda_p=100$ ， $[n_{st}]=3$ 。校核AB杆的稳定性。

$F_N = 26.6\text{kN}$

AB杆 $\lambda = \frac{\mu l}{i} \quad \mu = 1$

$$l = \frac{1.5}{\cos 30^\circ} = 1.732\text{m}$$

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{\pi(D^4 - d^4)4}{64(D^2 - d^2)\pi}}$$

$$= \frac{\sqrt{D^2 + d^2}}{4} = 16\text{mm}$$

得 $\lambda = \frac{1 \times 1.732 \times 10^3}{16} = 108 > \lambda_p$

AB为大柔度杆

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = 118\text{kN}$$

$$n = \frac{F_{cr}}{F_N} = \frac{118}{26.6} = 4.42 > n_{st} = 3$$

AB杆满足稳定性要求

南京大學
NANJING UNIVERSITY

第11章 压杆的稳定性分析与稳定性设计

www.slope.com.cn

§ 11-6 提高压杆稳定性的措施

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} \quad \text{欧拉公式}$$

F_{cr} 越大越稳定

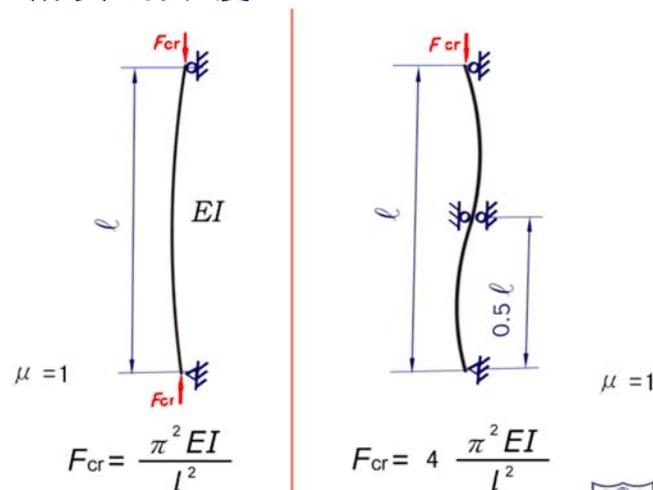
- 减小压杆长度 l
- 减小长度系数 μ (增强约束)
- 增大截面惯性矩 I (合理选择截面形状)
- 增大弹性模量 E (合理选择材料)



第11章 压杆的稳定性分析与稳定性设计

www.slope.com.cn

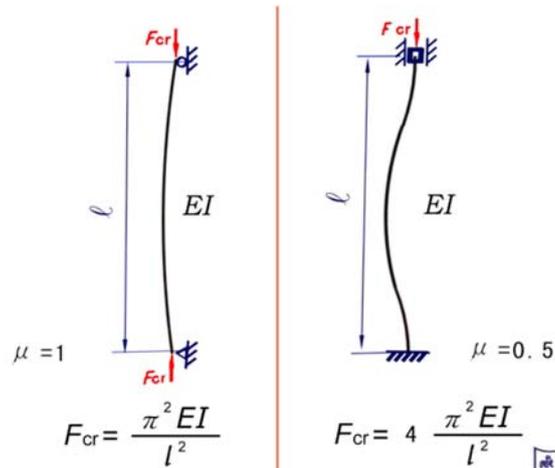
• 减小压杆长度 l



第11章 压杆的稳定性分析与稳定性设计

www.slope.com.cn

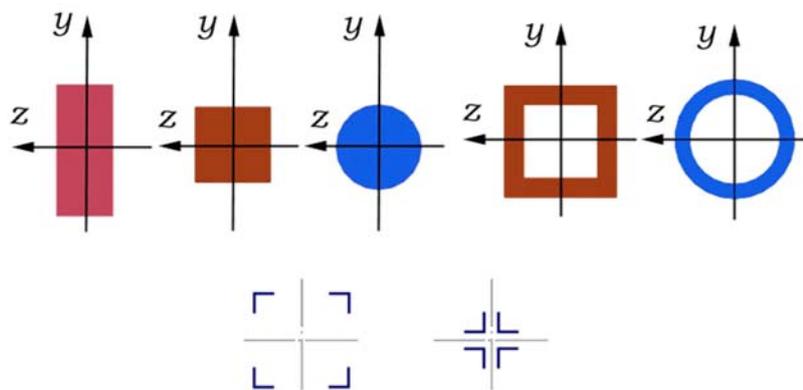
•减小长度系数 μ （增强约束）



第11章 压杆的稳定性分析与稳定性设计

www.slope.com.cn

•增大截面惯性矩 I （合理选择截面形状）



第11章 压杆的稳定性分析与稳定性设计

www.slope.com.cn

- 增大弹性模量 E (合理选择材料)

大柔度杆 $F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$

中柔度杆 $\sigma_{cr} = a - b\lambda$

