

# 工程力学

## 复习指导和考点总结

朱鸿鹄

南京大学地球科学与工程学院

2018-12-18

---

## 拉压、扭转、弯曲总结

内力包括：轴力、剪力、扭矩、弯矩

内力分量正负号的规定：

1. 轴力：拉正压负
2. 剪力：顺正逆负
3. 扭矩：右正左负
4. 弯矩：下正上负（指受拉区）

内力图的画法：截面法+静力平衡分析

记忆公式!

	轴向拉压	扭转	弯曲
变形 刚度条件	$\Delta L = \frac{NL}{EA}$ $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$	$\varphi = \frac{TL}{GI_P}$ $\theta_{\max} = \frac{T_{\max}}{GI_P} \leq [\theta]$	$EI f(x)'' = -M(x)$ $f_{\max} \leq [f] \quad \theta_{\max} \leq [\theta]$ <p>积分法/叠加法</p>
虎克定律	$\sigma = E\varepsilon$	$\tau = G\gamma$	
超静定问题	<ol style="list-style-type: none"> <li>1、静力平衡方程</li> <li>2、变形协调方程（补充方程）</li> </ol>		

记忆公式!

# 拉压、扭转、弯曲总结

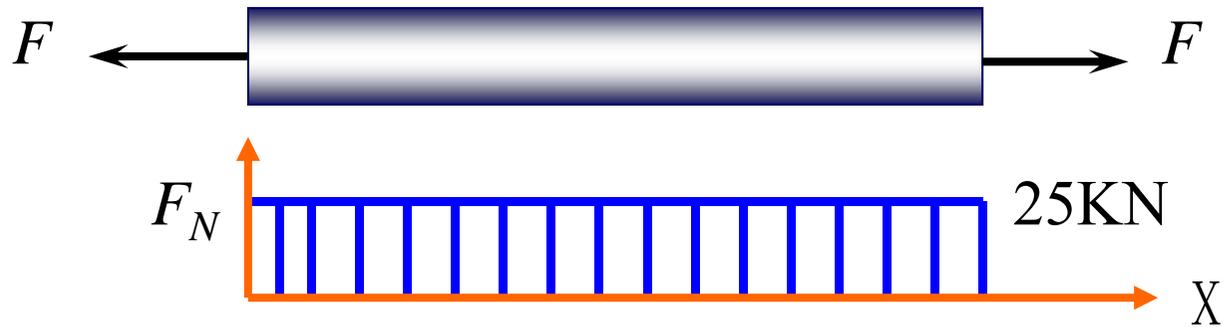
截面	极惯性矩	抗扭截面系数	惯性矩	抗弯截面系数
圆形	$I_P = \frac{\pi d^4}{32}$	$W_P = \frac{\pi d^3}{16}$	$I_Z = \frac{\pi d^4}{64}$	$W_Z = \frac{\pi d^3}{32}$
空心圆	$I_P = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4)$	$W_P = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4)$	$I_Z = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4)$	$W_Z = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4)$
矩形	-	-	$I_Z = \frac{bh^3}{12}$	$W_Z = \frac{bh^2}{6}$

**记忆公式！**

**根据中性轴位置分辨矩形截面的***b***和***h***！**

## 拉压、扭转、弯曲总结

例1: 已知一圆杆受拉力 $F=25\text{ kN}$ , 直径 $d=14\text{mm}$ , 许用应力 $[\sigma]=170\text{MPa}$ , 试校核此杆是否满足强度要求(校核强度)。



解: 1、轴力 $F_N = F = 25\text{kN}$

2、应力: 
$$\sigma_{\max} = \frac{F_N}{A} = \frac{4F}{\pi d^2} = \frac{4 \times 25 \times 10^3}{3.14 \times 0.014^2} = 162\text{ MPa}$$

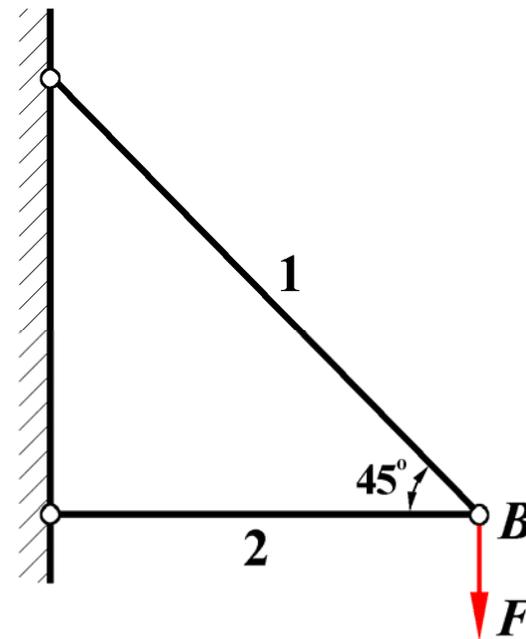
3、强度校核: 
$$\sigma_{\max} = 162\text{MPa} < [\sigma] = 170\text{MPa}$$

此杆满足强度要求, 能够正常工作。

## 拉压、扭转、弯曲总结

例2：已知简单构架：杆1、2截面积  $A_1=A_2=100 \text{ mm}^2$ ，材料的许用拉应力  $[\sigma_t]=200 \text{ MPa}$ ，许用压应力  $[\sigma_c]=150 \text{ MPa}$

试求：载荷  $F$  的许用值  $[F]$

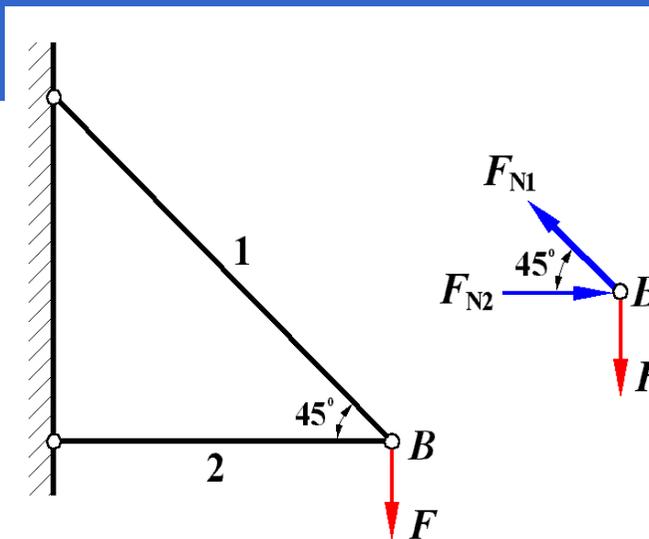


## 解：1. 轴力分析

$$\text{由 } \sum F_x = 0, \sum F_y = 0$$

$$F_{N1} = \sqrt{2}F \text{ (拉伸)}$$

$$F_{N2} = -F \text{ (压缩)}$$



## 2. 利用强度条件确定[F]

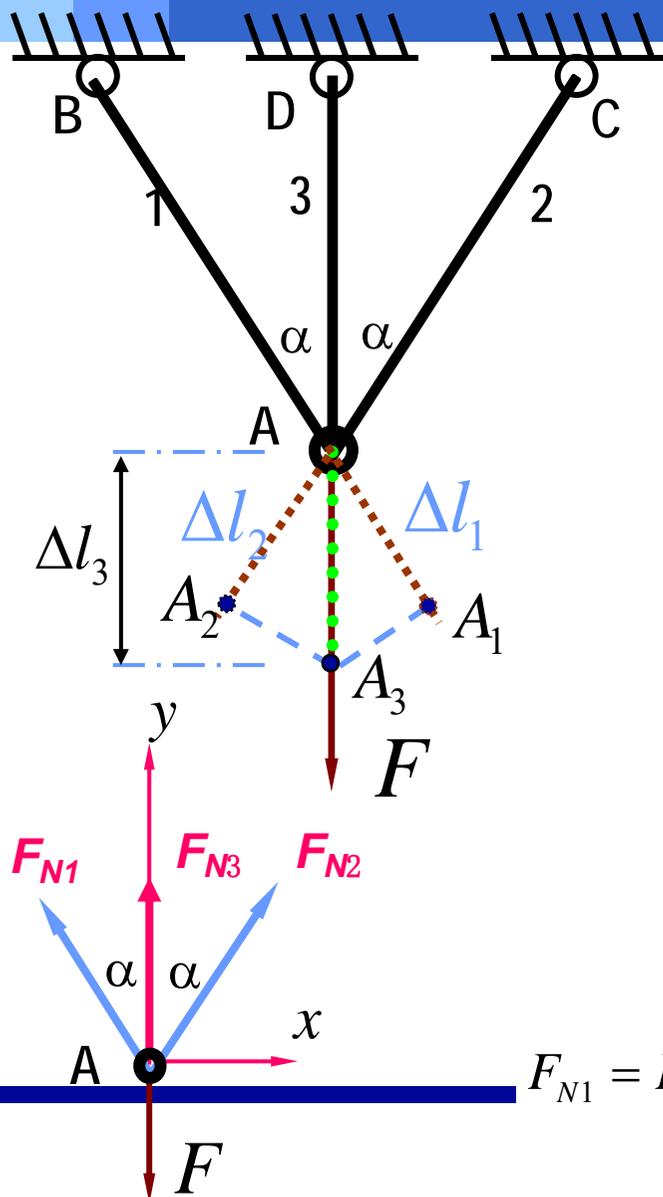
( $A_1=A_2=100 \text{ mm}^2$ , 许用拉应力  $[\sigma_t]=200 \text{ MPa}$ , 许用压应力  $[\sigma_c]=150 \text{ MPa}$ )

$$\frac{F_{N1}}{A_1} \leq [\sigma_t], \frac{\sqrt{2}F}{A_1} \leq [\sigma_t] \qquad \frac{F}{A_2} \leq [\sigma_c]$$

$$F \leq \frac{A_1[\sigma_t]}{\sqrt{2}} = 14.14 \text{ kN} \qquad F \leq A_2[\sigma_c] = 15.0 \text{ kN}$$

$$[F] = 14.14 \text{ kN}$$

例3: 图示杆系结构,  $l_1 = l_2, E_1 A_1 = E_2 A_2, E_3 A_3$  已知, 求: 各杆的内力。



解: ①平衡方程:

$$\sum X = 0 \Rightarrow F_{N1} \sin \alpha - F_{N2} \sin \alpha = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow F_{N1} \cos \alpha + F_{N2} \cos \alpha + F_{N3} - F = 0 \quad (2)$$

②几何方程——变形协调方程:

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 = \Delta L_3 \cos \alpha$$

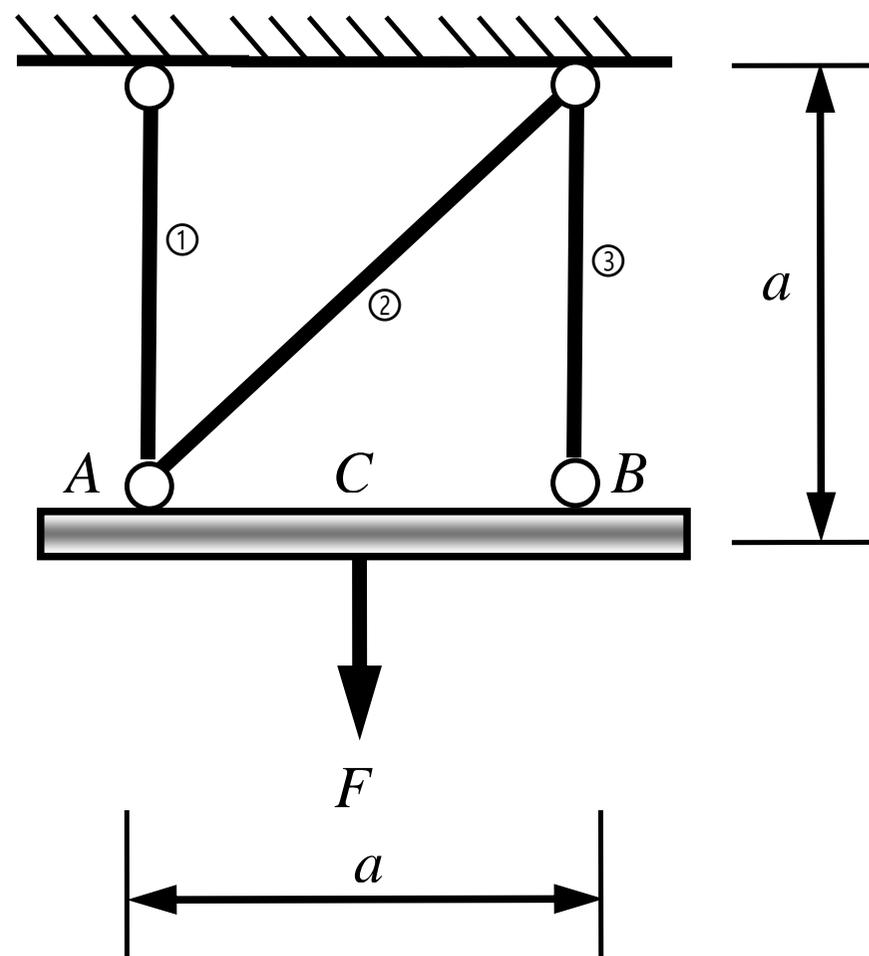
③物理方程—变形与受力关系

$$\frac{F_{N1} L_1}{E_1 A_1} = \frac{F_{N3} L_3}{E_3 A_3} \cos \alpha \quad \text{补充方程} \quad (3)$$

④联立方程(1)、(2)、(3)可得:

$$F_{N1} = F_{N2} = \frac{E_1 A_1 F \cos^2 \alpha}{2E_1 A_1 \cos^3 \alpha + E_3 A_3}; \quad F_{N3} = \frac{E_3 A_3 F}{2E_1 A_1 \cos^3 \alpha + E_3 A_3}$$

例4 如图已知杆3的抗拉刚度  $E_3A_3$  大于杆1的抗拉刚度  $E_1A_1$ ，杆件的长度  $l_1=l_3=a$ ， $l_2=\sqrt{2}a$ ，试求刚性梁  $AB$  中点  $C$  受到集中力  $F$  作用时发生的竖向位移和水平位移。



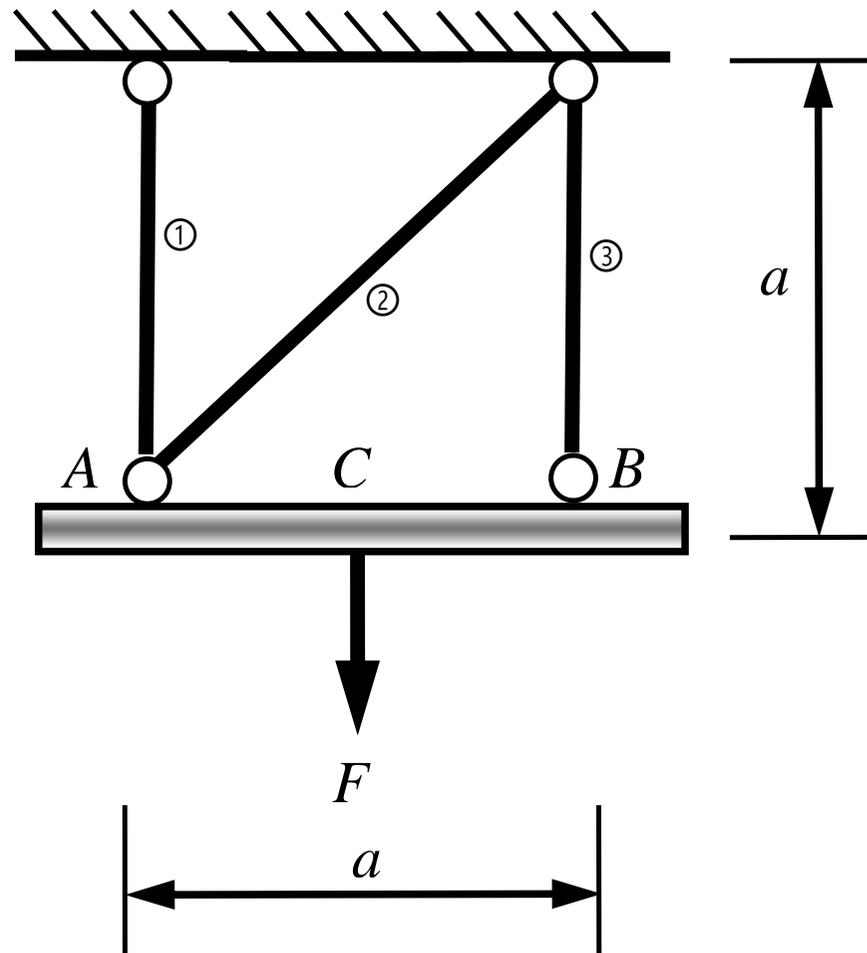
解：（1）由平衡方程求轴力，  
根据

$$\begin{cases} \sum X = 0 \\ \sum Y = 0 \\ \sum M_B = 0 \end{cases}$$

得

$$F_1 = F_3 = \frac{1}{2}F$$

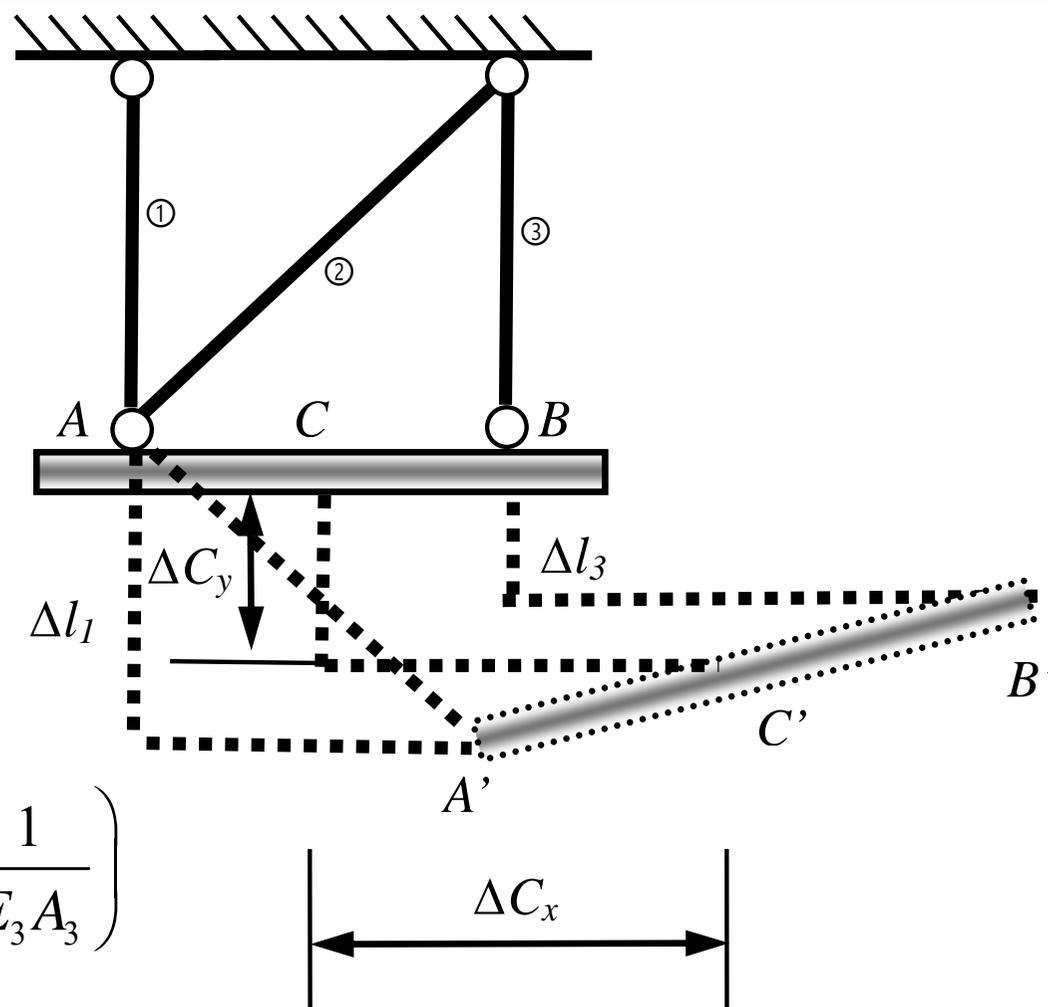
$$F_2 = 0$$



(2) 做变形图，确定新节点位置，求C点位移。根据图示可知，若1杆伸长 $\Delta l_1$ ，3杆伸长 $\Delta l_3$ ， $\Delta l_2=0$ ，则C点的竖直位移和水平位移分别为

$$\Delta C_x = \Delta l_1 = \frac{Fa}{2E_1A_1}$$

$$\Delta C_y = \frac{\Delta l_1 + \Delta l_3}{2} = \frac{Fa}{4} \left( \frac{1}{E_1A_1} + \frac{1}{E_3A_3} \right)$$



## 拉压、扭转、弯曲总结

例5 已知  $T=1.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$ ,  $[\tau] = 50 \text{ MPa}$ , 试根据强度条件设计实心圆轴与  $\alpha = 0.9$  的空心圆轴。

解: 1. 确定实心圆轴直径

$$\tau_{\max} \leq [\tau] \quad \tau_{\max} = \frac{T}{\frac{\pi d^3}{16}}$$

$$\frac{T}{\frac{\pi}{16}d^3} \leq [\tau]$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16T}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16(1.5 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m})}{\pi(50 \times 10^6 \text{ Pa})}} = 0.0535 \text{ m}$$

取:  $d = 54 \text{ mm}$

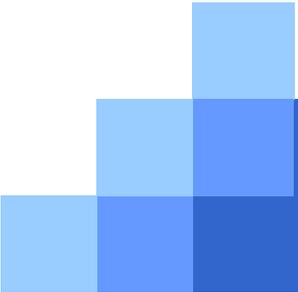
# 拉压、扭转、弯曲总结

## 2. 确定空心圆轴内、外径

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4) \quad \frac{16T}{\frac{\pi}{16} D^3 (1 - \alpha^4)} \leq [\tau]$$

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16T}{\pi(1 - \alpha^4)[\tau]}} = 76.3 \text{ mm} \quad d = \alpha D = 68.7 \text{ mm}$$

取：  $D = 76 \text{ mm}$ ，  $d = 68 \text{ mm}$



## 拉压、扭转、弯曲总结

- **确定控制截面上剪力和弯矩有几种方法？怎样确定弯矩图上极值点处的弯矩数值？**
-

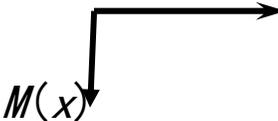
# 拉压、扭转、弯曲总结

■ 梁的内力计算  $\frac{dF_s(x)}{dx} = q(x) \quad \frac{dM(x)}{dx} = F_s(x) \quad \frac{dM^2(x)}{dx^2} = q(x)$

(1) 当分布力的方向向上时 —— 剪力图为斜向上的斜直线；

$F_s$ 图: 

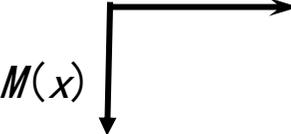
弯矩图为上凸的二次曲线。

M图:  

(2) 当分布力的方向向下时 —— 剪力图为斜向下的斜直线；

$F_s$ 图: 

弯矩图为下凸的二次曲线。

M图:  

# 拉压、扭转、弯曲总结

## ■ 梁内力作图法（简易法）

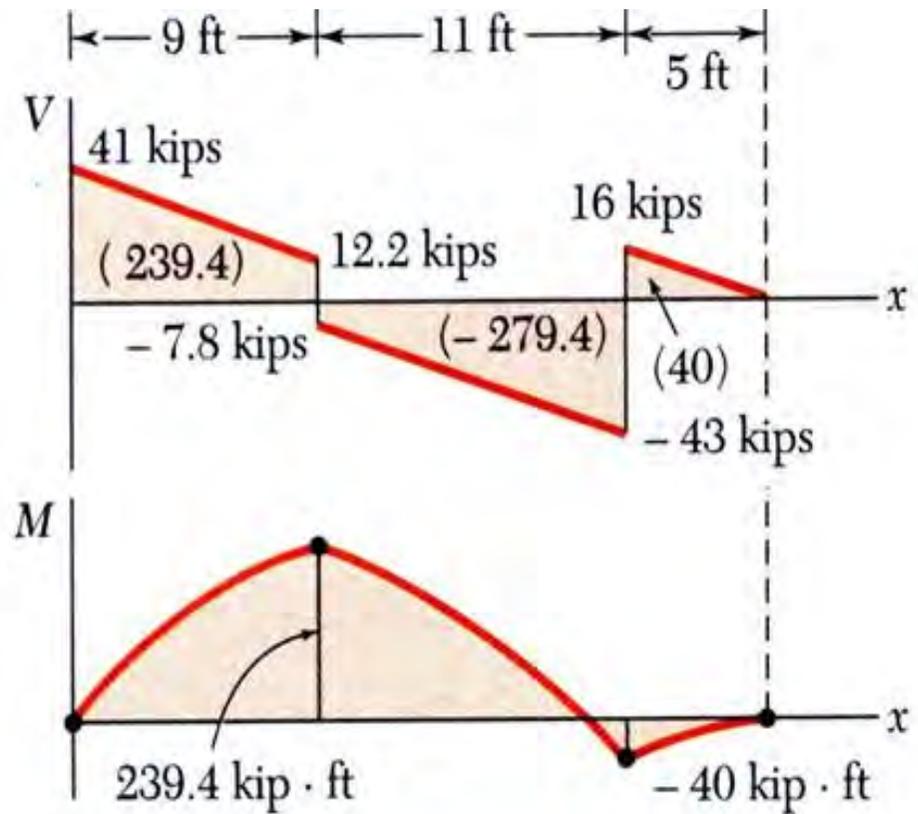
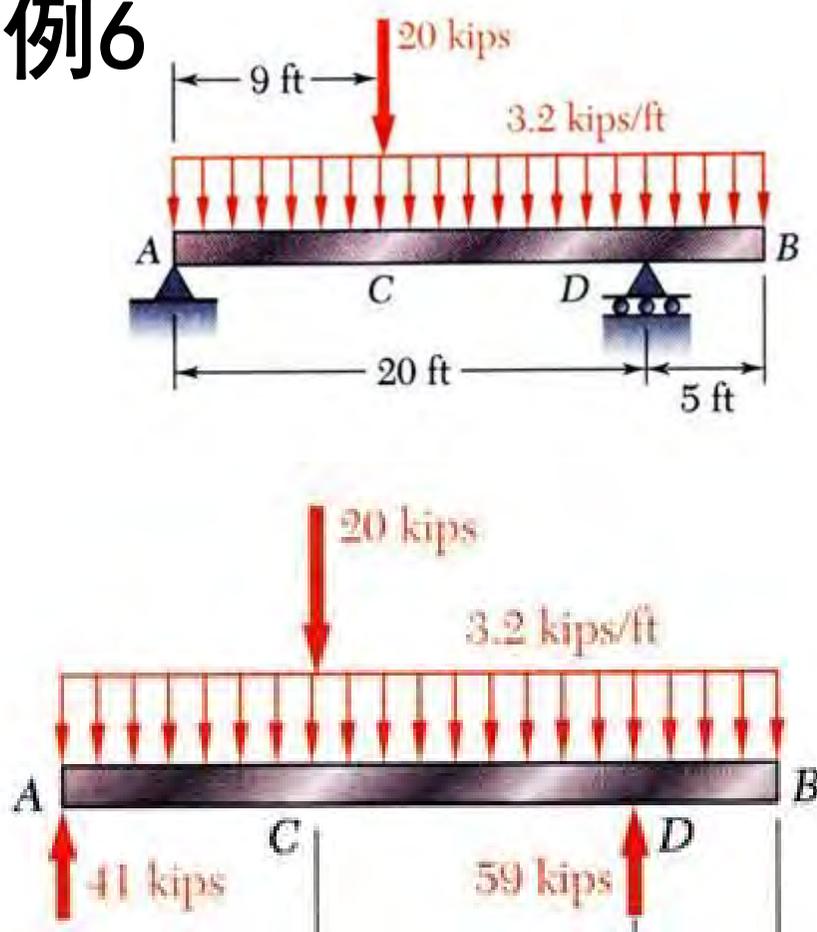
基本步骤：

- 1、确定梁上所有外力（求支座反力）；
- 2、分段；
- 3、利用微分规律判断梁各段内力图的形状；
- 4、确定控制点内力的数值大小及正负；
- 5、画内力图。

**控制点：**端点、分段点（外力变化点）和驻点（极值点）等。

# 拉压、扭转、弯曲总结

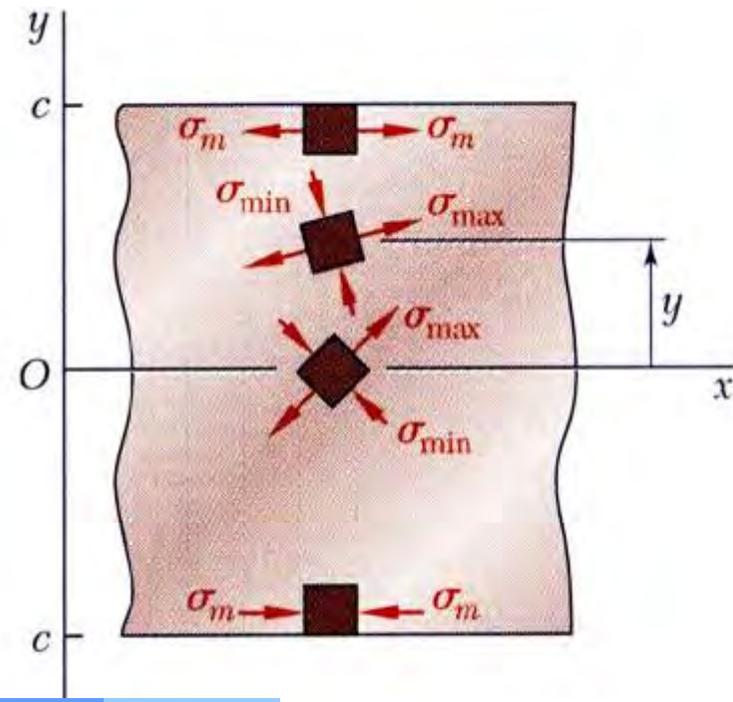
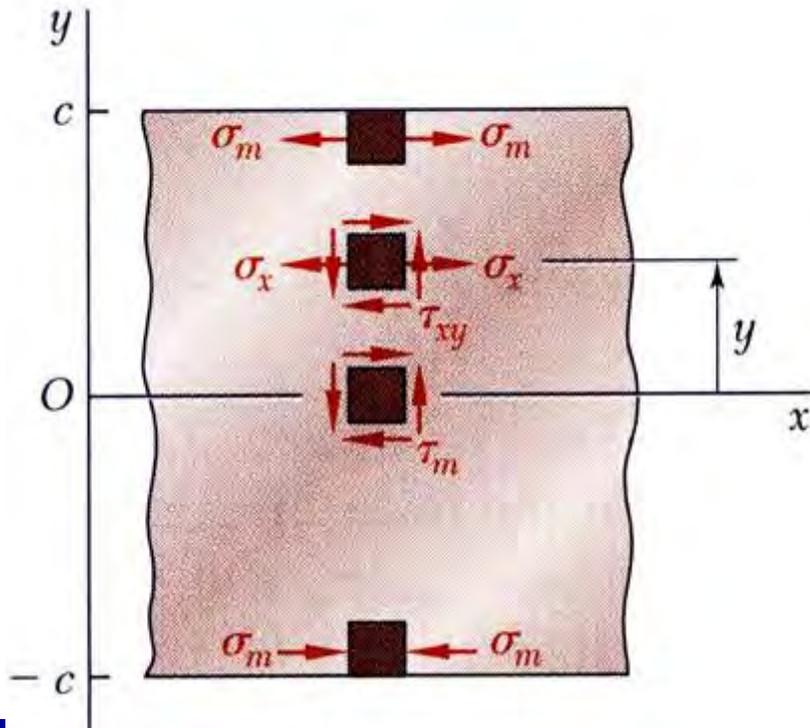
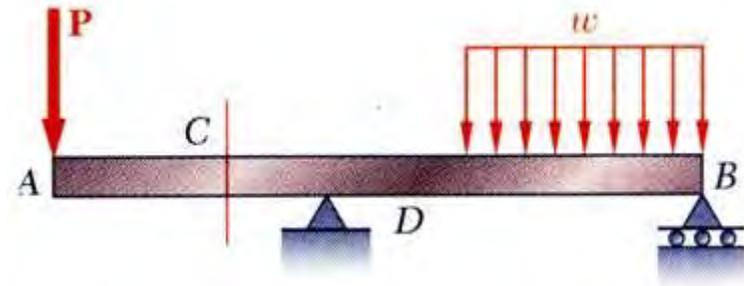
## 例6



**M图应翻转**（注意正弯矩画在受拉侧）

# 拉压、扭转、弯曲总结

- 横力弯曲和纯弯曲
- 梁的应力分布



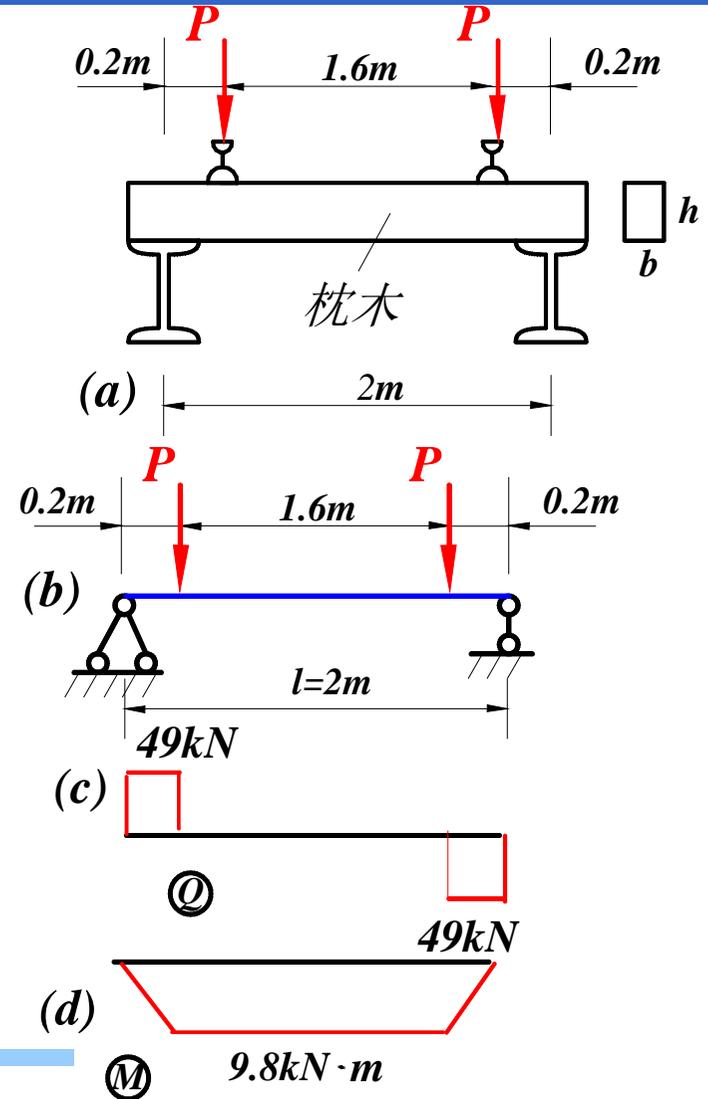
# 拉压、扭转、弯曲总结

■例7：试为图示钢轨枕木选择矩形截面。已知矩形截面尺寸的比例为  $b:h=3:4$ ，枕木的弯曲许用正应力  $[\sigma]=15.6\text{MPa}$ ，许用剪应力  $[\tau]=1.7\text{MPa}$ ，钢轨传给枕木的压力  $P=49\text{KN}$ 。

$$W_z = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{9.8 \times 10^3}{15.6 \times 10^6} = 628 \text{cm}^3 \quad h = 18\text{cm}, b = 13\text{cm}$$

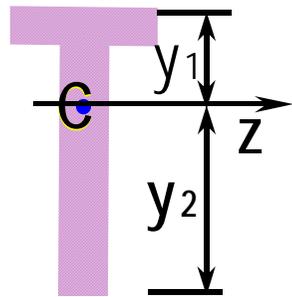
$$Q_{\max} = 49\text{kN}\cdot\text{m} \quad \tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{A} = 3.14\text{MPa} > [\tau]$$

$$\text{令 } Q_{\max} < [\tau] \quad \text{则 } h = 24\text{cm}, b = 18\text{cm}$$

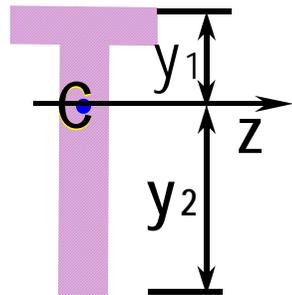


# 拉压、扭转、弯曲总结

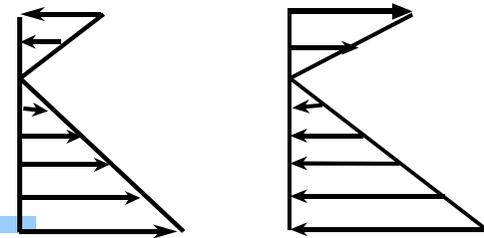
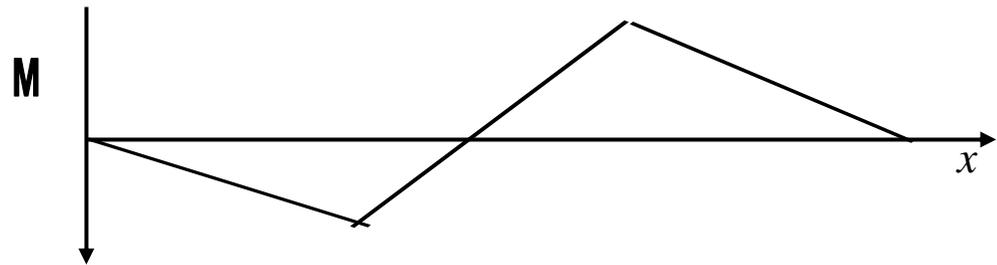
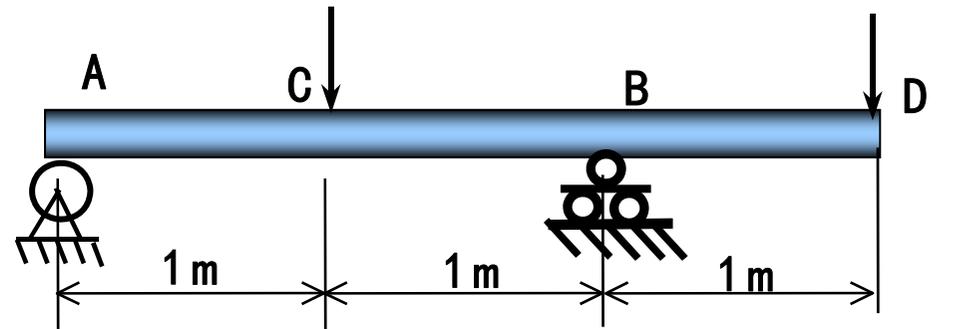
注意：最大拉应力、最大压应力可能发生在不同的截面内



受拉区  
受压区



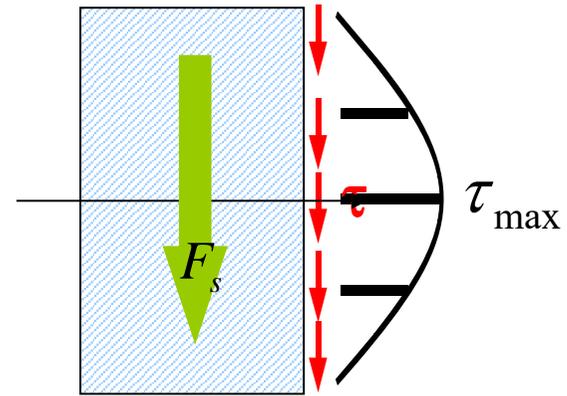
受压区  
受拉区



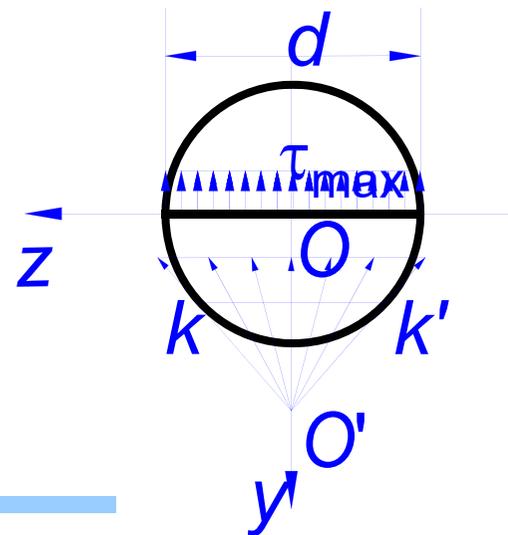
# 拉压、扭转、弯曲总结

梁截面上的最大切应力发生在中性轴位置

$$\tau_{\max} = \frac{QS_z^*}{I_z b} = \frac{3Q}{2A} = 1.5\bar{\tau}$$



$$\tau_{\max} = \frac{QS_z^*}{I_z d} = \frac{4Q}{3A} = 1.33\bar{\tau}$$



# 拉压、扭转、弯曲总结

## ■ 梁的变形求解：转角和挠度

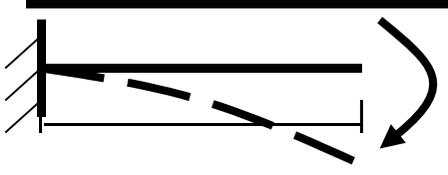
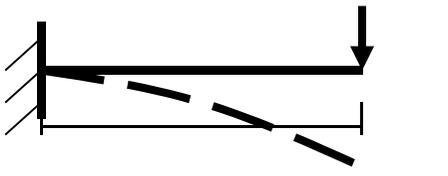
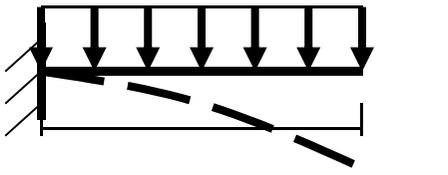
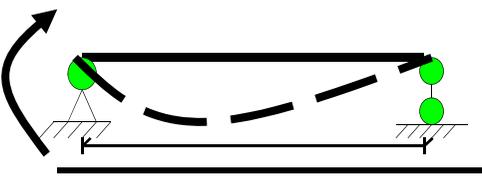
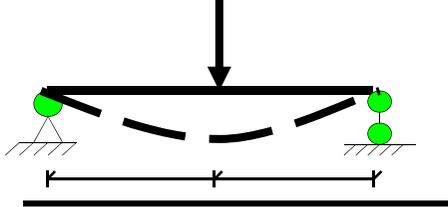
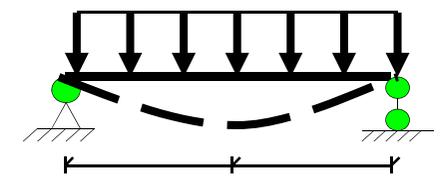
### 1. 积分法 2. 叠加法（会查表及利用公式）

$$EIw''(x) = -M(x)$$

$$EIw'(x) = -\int M(x)dx + C_1$$

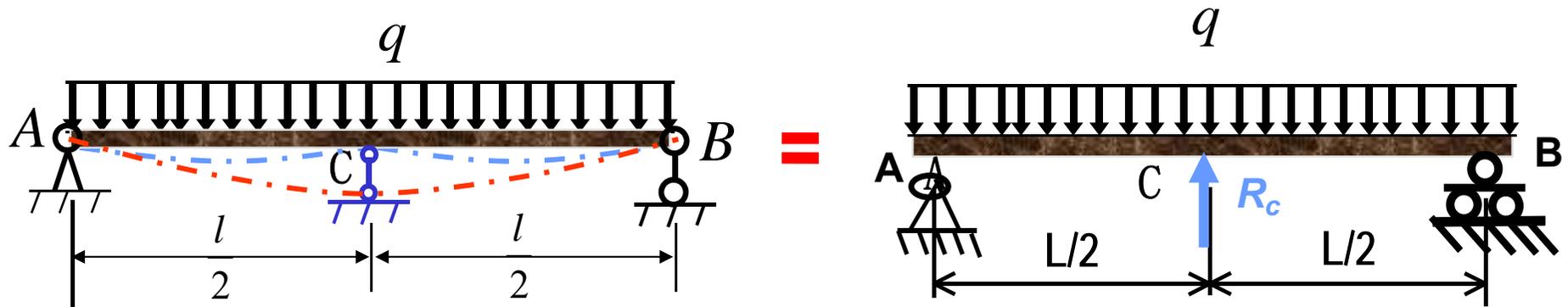
$$EIw(x) = -\int (\int M(x)dx)dx + C_1x + C_2$$

会推导，会查表（P189）用公式！

	转 角	挠 度
	$\theta_{\max} = \frac{Ml}{EI}$	$w_{\max} = \frac{Ml^2}{2EI}$
	$\theta_{\max} = \frac{Pl^2}{2EI}$	$w_{\max} = \frac{Pl^3}{3EI}$
	$\theta_{\max} = \frac{ql^3}{6EI}$	$w_{\max} = \frac{ql^4}{8EI}$
	$\frac{Ml}{3EI}, \frac{Ml}{6EI}$	
	$\theta_{\max} = \frac{Pl^2}{16EI_z}$	$w_{\max} = \frac{Pl^3}{48EI_z}$
	$\theta_{\max} = \frac{ql^3}{24EI_z}$	$w_{\max} = \frac{5ql^4}{384EI_z}$

# 拉压、扭转、弯曲总结

- 判断梁的超静定次数
- 简单超静定梁的求解



解超静定的步骤 —— (静力、几何、物理条件)

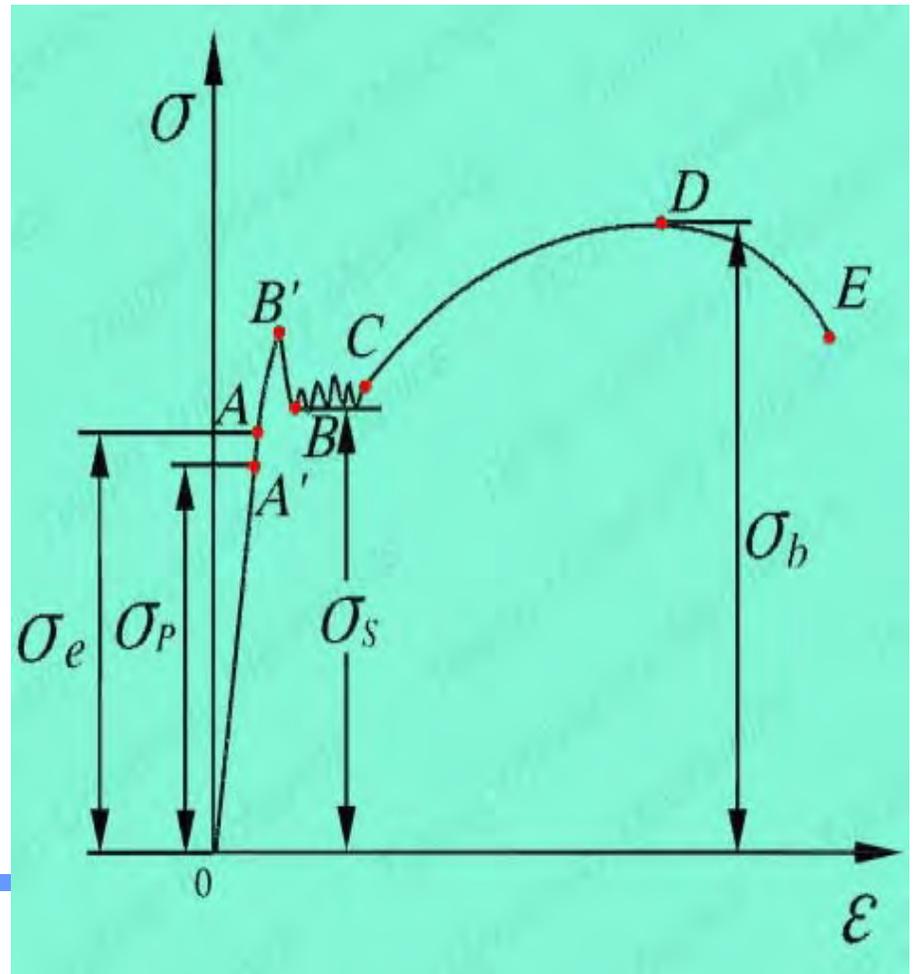
$$y_c = y_{cq} + y_{cR_c} = 0 \quad -\frac{5ql^4}{384EI} + \frac{R_c l^3}{48EI} = 0 \quad \Rightarrow R_c = \frac{5}{8} qL$$

# 材料的力学性能总结

- 两类材料：脆性（铸铁）和塑性材料（低碳钢）

低碳钢拉伸的4个阶段：  
**弹性-屈服-强化-颈缩**

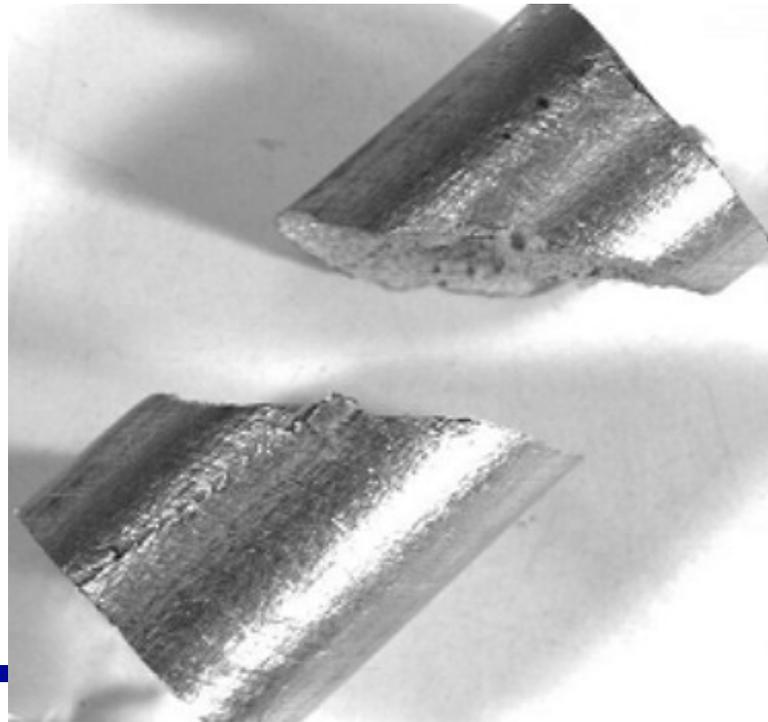
低碳钢拉伸和压缩性能的对比



# 材料的力学性能总结

- 两类材料：脆性（铸铁）和塑性材料（低碳钢）

**脆性材料压缩破坏的原因：剪切破坏**

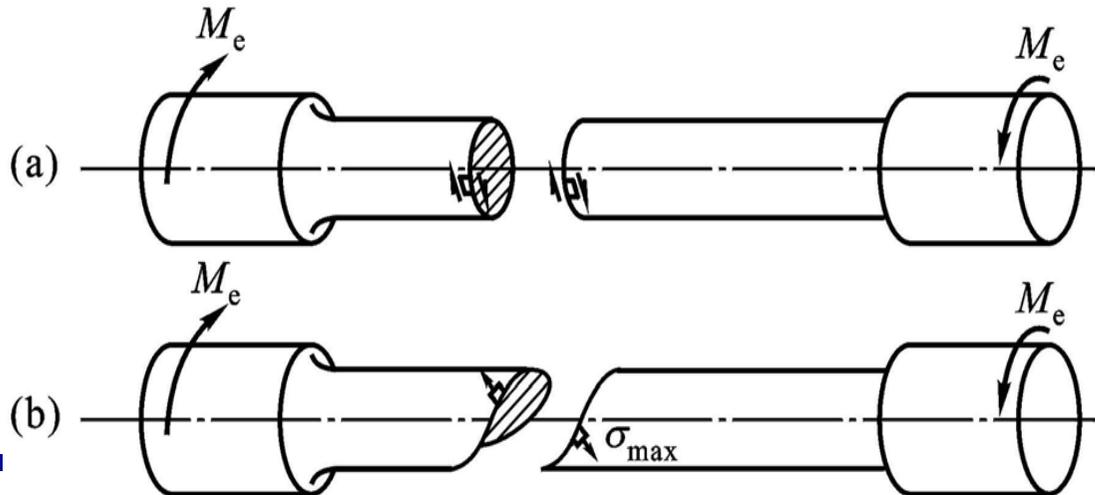


# 材料的力学性能总结

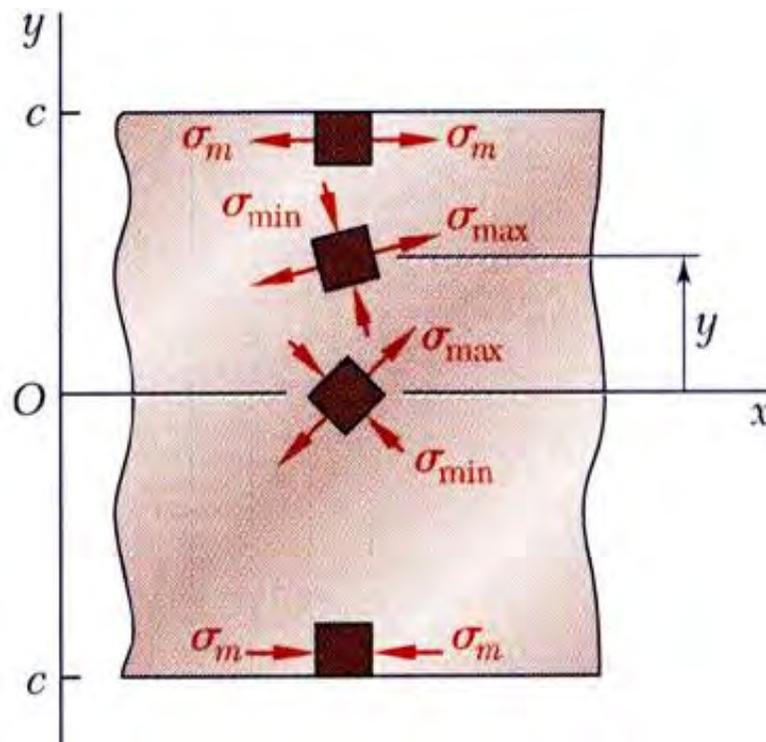
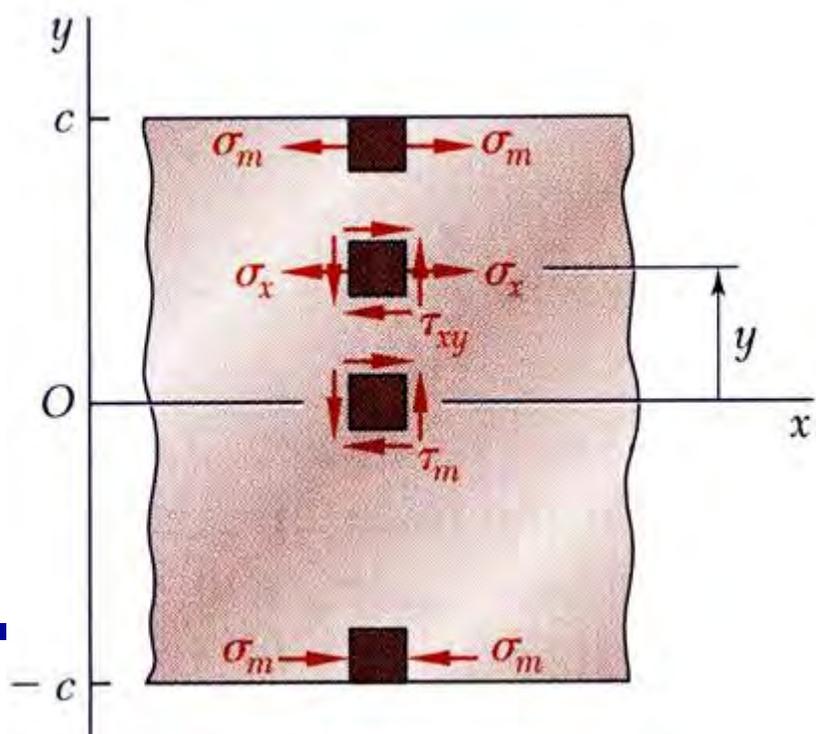
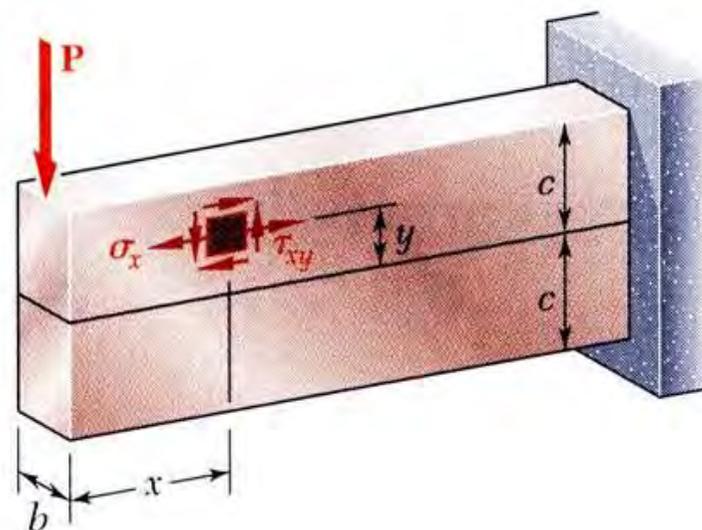
- 两类材料：脆性（铸铁）和塑性材料（低碳钢）

塑性材料扭转破坏的原因：剪切破坏

脆性材料扭转破坏的原因：受拉破坏



# 应力状态总结

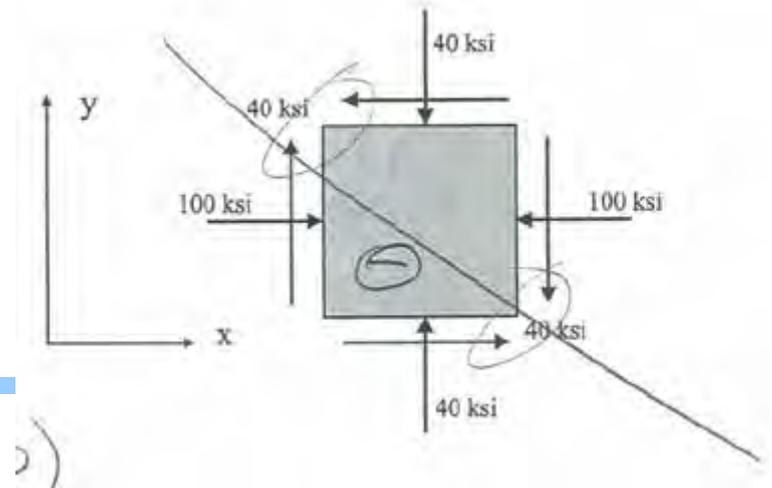


# 应力状态总结

- 应力状态分析方法：解析法或图解法
- 确定斜截面的正应力和剪应力

$$\begin{cases} \sigma_{\alpha} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha \\ \tau_{\alpha} = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha \end{cases}$$

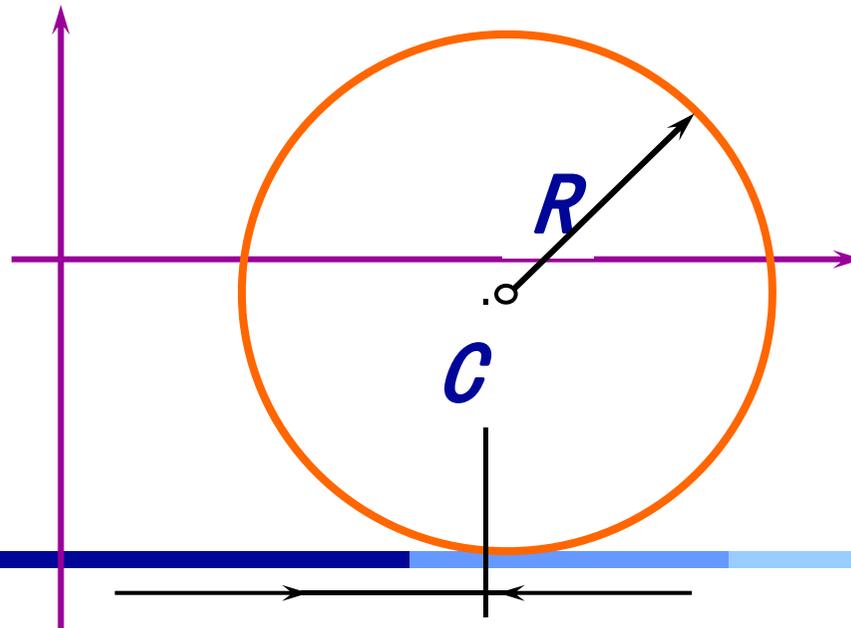
**在理解的基础上记忆公式！**



# 应力状态总结

■ 画莫尔圆  $(\sigma_\alpha - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2})^2 + \tau_\alpha^2 = (\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy}^2$

圆心:  $(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0)$       半径:  $R = \sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy}^2}$



# 应力状态总结

## ■ 定出主应力的方向

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad \tan 2\alpha_0 = \frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

$$\tau_{\max/\min} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad \tan 2\alpha_1 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

**记忆公式!**

$$\alpha_1 = \alpha_0 + 45^\circ$$

# 强度理论总结

## 4个强度理论

**脆性断裂：** 最大拉应力理论（第一强度准则）  
最大伸长线应变理论（第二强度准则）

**塑性屈服：** 最大切应力理论（第三强度准则）  
形状改变能密度理论（第四强度准则）

## 强度理论总结

强度理论的统一表达式（相当应力）： $\sigma_r \leq [\sigma]$

脆性材料

$$\sigma_{r1} = \sigma_1 \leq [\sigma]$$

$$\sigma_{r2} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]$$

记忆公式！

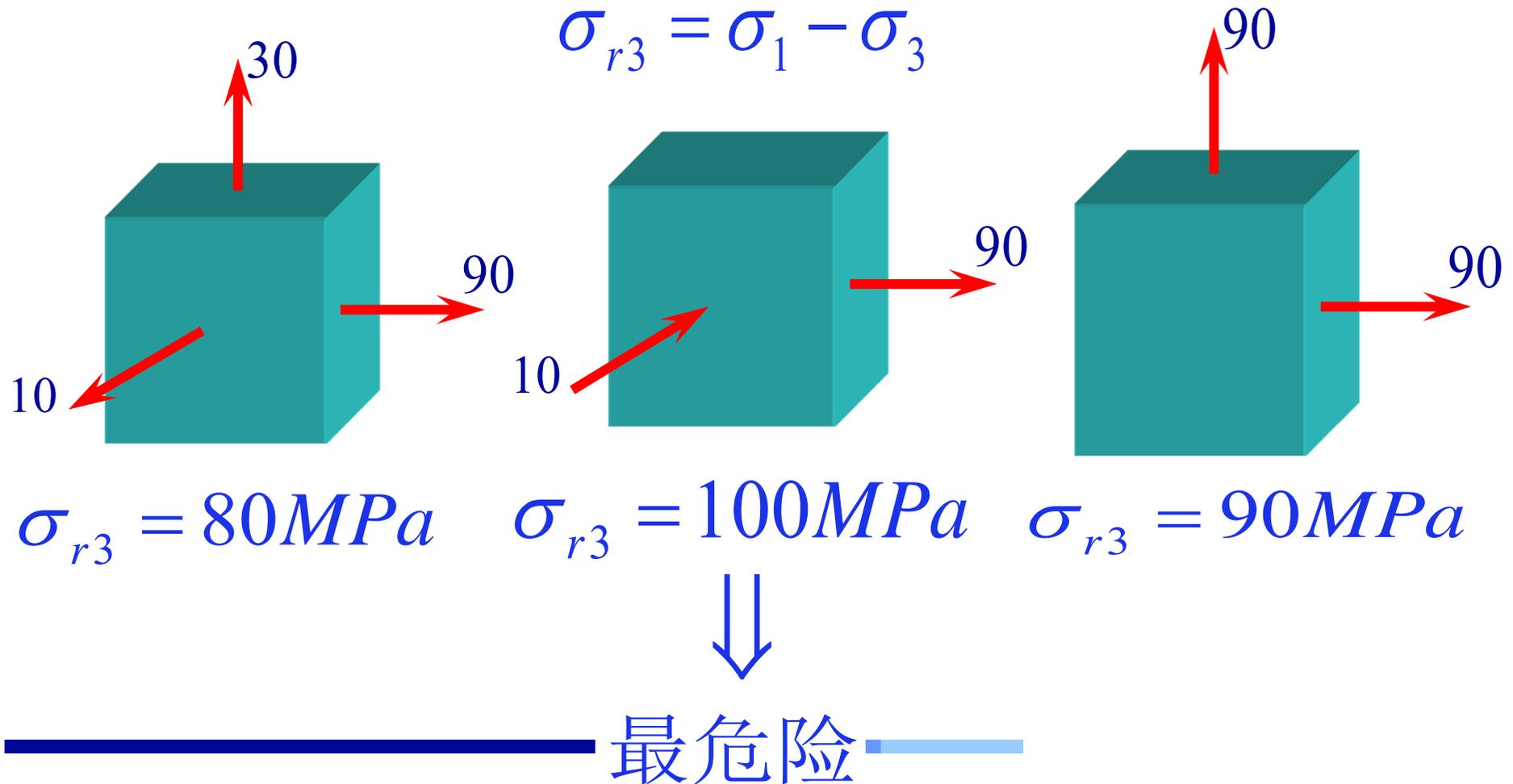
塑性材料

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma]$$

## 强度理论总结

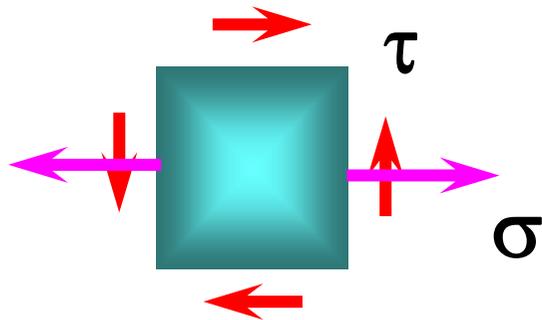
例8 试用第三强度理论分析图示应力状态中哪种最危险？



## 强度理论总结

例9 已知 $\sigma$ 和 $\tau$ ，试写出第三和第四强度理论的表达式

解：首先确定主应力



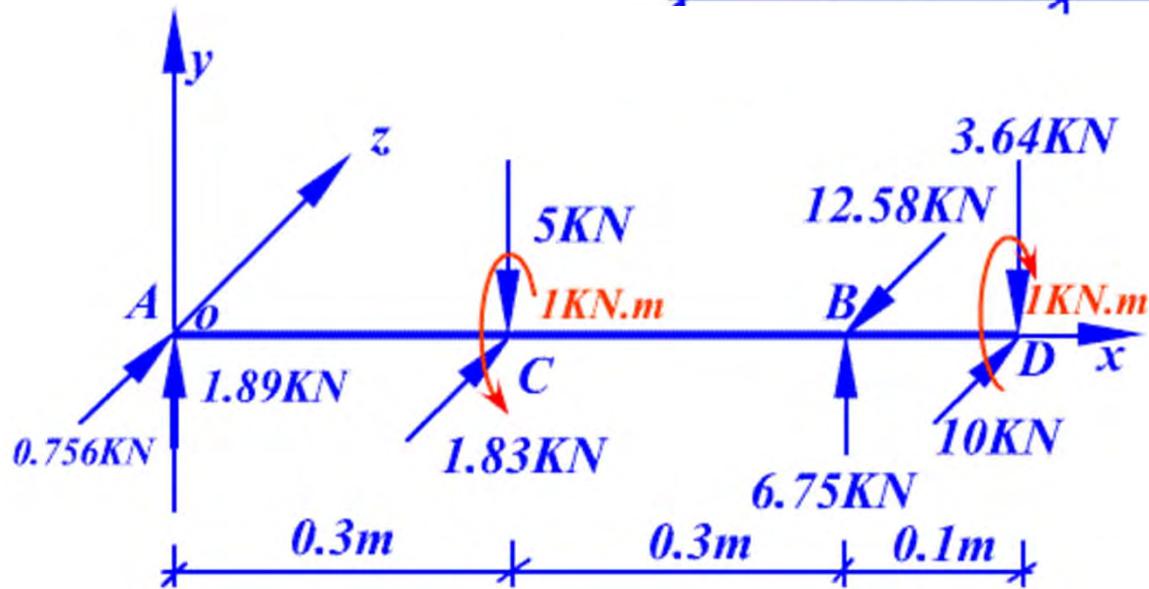
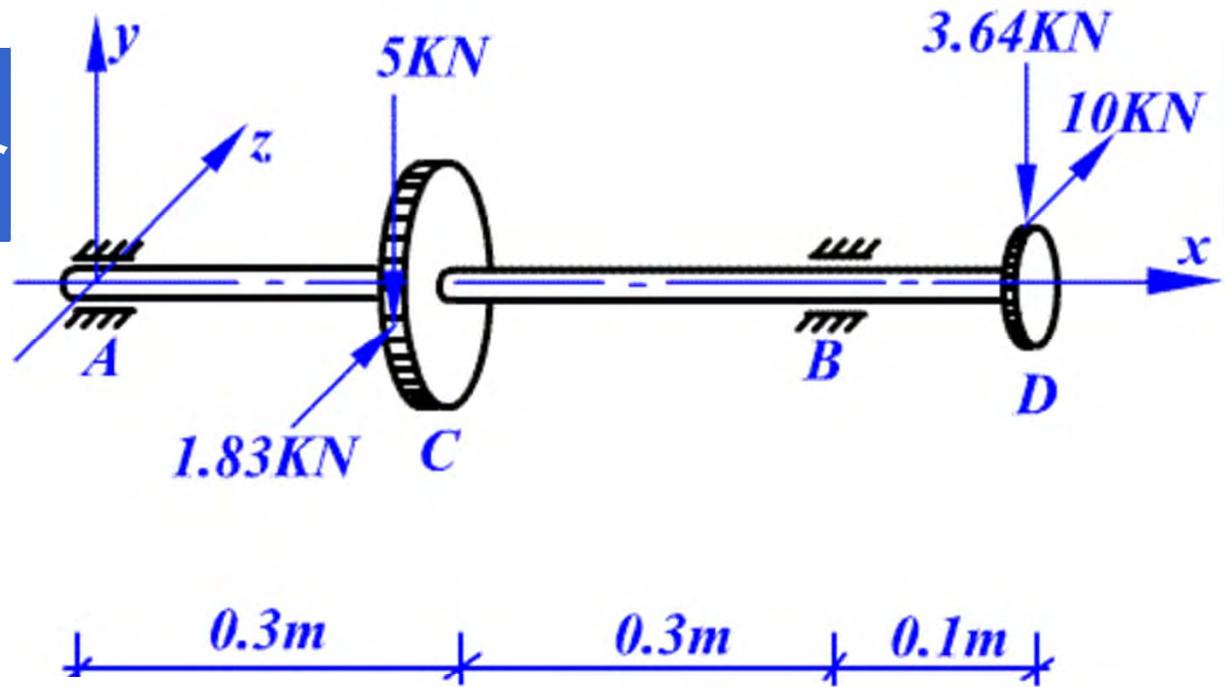
$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad \sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

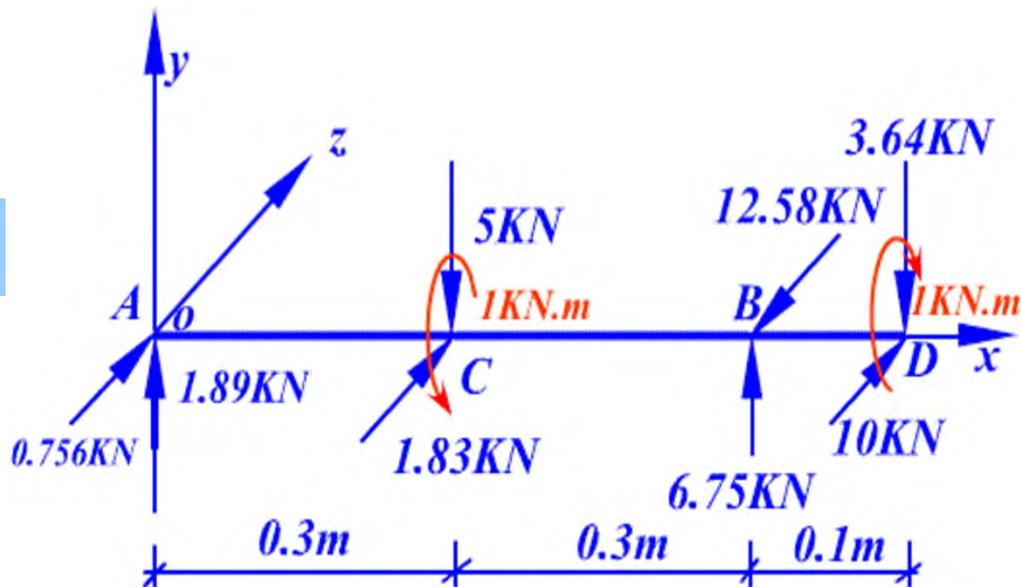
$$\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

# 弯扭组合



将各力向圆轴的截面形心简化，画出受力简图。

受力简图



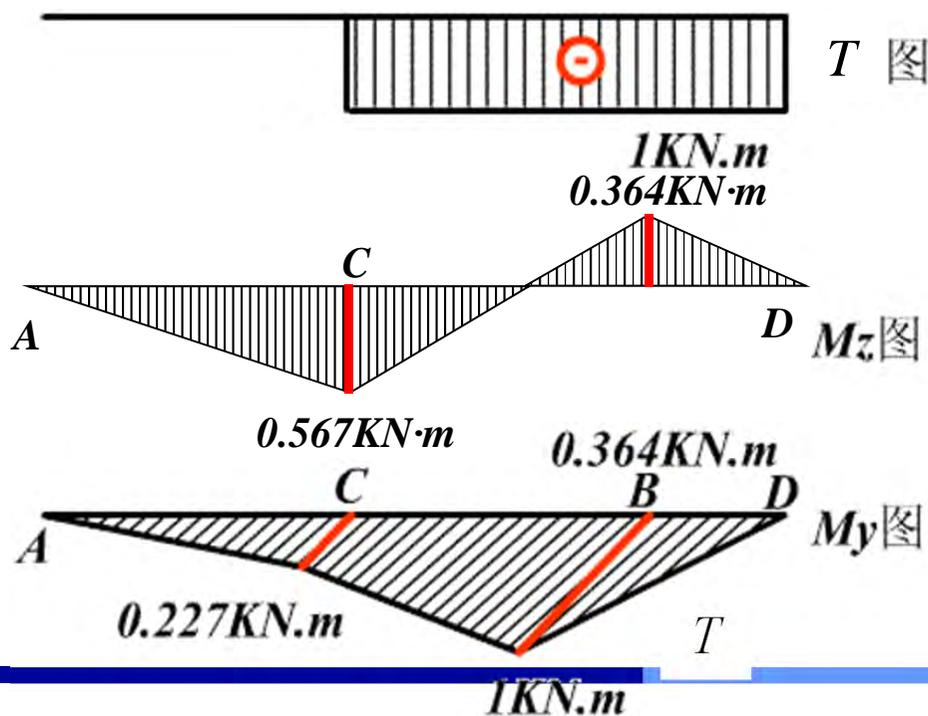
从内力图分析，**B**截面为危险截面。  
由第四强度理论公式

$$\sigma_{r4} = \frac{1}{W} \sqrt{M^2 + 0.75T^2} \leq [\sigma]$$

可得：

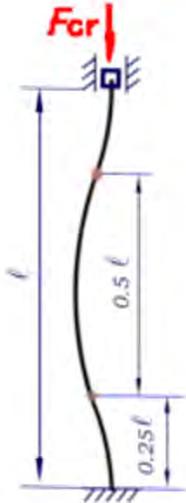
$$\frac{\pi d^3}{32} = W \geq \frac{\sqrt{M^2 + 0.75T^2}}{[\sigma]}$$

解出： **$d=5.19mm$**



# 压杆稳定总结

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$$

支 座 情 况	一端自由 一端固定	两端铰支	一端铰支 一端固定	两端固定
简 图				
长度系数 $\mu$	2	1	0.7	0.5
临界 压力	$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(2l)^2}$	$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$	$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0.7l)^2}$	$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0.5l)^2}$

## 考试安排

- **题型：问答/计算题**
- **题量：8题（每题10-15分）**
- **分步给分（解题步骤要一一列出）**
- **带计算器、直尺、量角器、圆规**

# 考试内容及其大致分布

理论力学	包含在材料力学中
拉伸和压缩	10%
扭转	10%
弯曲应力	20%
梁弯曲时的位移	15%
简单的超静定问题	15%
应力状态和强度理论	10%
组合变形及连接部分的计算	15%
压杆稳定	5%

# 主要考点

考点1 内力和内力图：熟练进行正推和反推

考点2 材料的力学性能：钢和铸铁等材料的性能及其对比

考点3 拉伸和压缩：应力、变形计算

考点4 扭转：应力、变形计算

考点5 梁的内力、应力+强度校核（正、切应力）

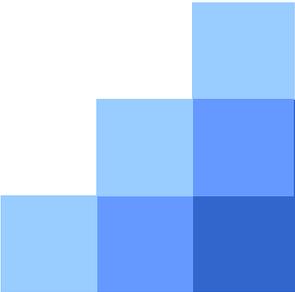
考点6 梁的变形（二次积分法和叠加法）+刚度校核

考点7 应力状态分析：熟记公式+莫尔圆画法

考点8 强度理论及其应用：了解适用的材料及熟记公式

考点9 组合变形：熟练分解扭转、弯曲荷载，并利用叠加原理进行应力分析

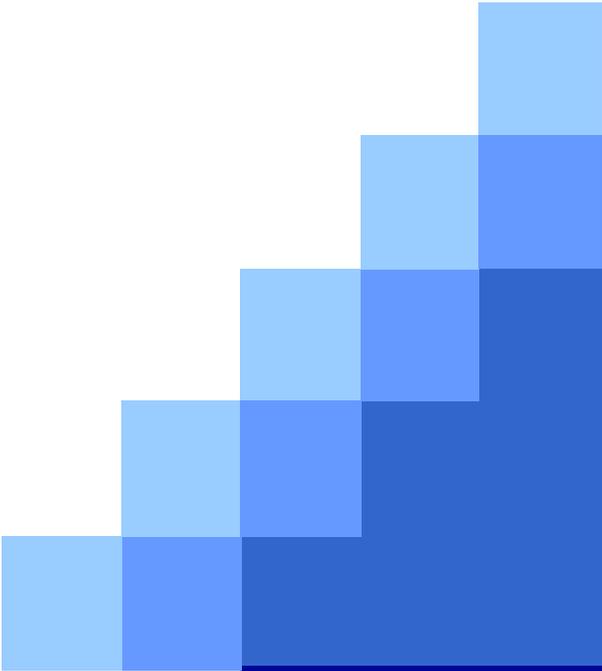
考点10 压杆稳定性和支承条件的关系



# 主要考点

本课程的所有课件均可在  
<http://www.slope.com.cn>  
下载





**Thank You !**

祝同学们考出好成绩！

---